

AD2B31ZEO – Základy elektrických obvodů

Konzultace 15.5.2020

http://sami.fel.cvut.cz/ZEO_DS/

KMITOČTOVÉ CHARAKTERISTIKY

FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKY

$$\hat{P}(j\omega) = P(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

$$\hat{P}(j\omega) = \frac{\hat{M}(j\omega)}{\hat{N}(j\omega)}$$

$$\hat{P}(j\omega) = \frac{\hat{M}(j\omega)}{\hat{N}(j\omega)} = \frac{a_m (j\omega)^m + a_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + a_1 j\omega + a_0}{b_n (j\omega)^n + b_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + b_1 j\omega + b_0}$$

$$\hat{P}(j\omega) = K \frac{\overset{\text{nuly}}{(j\omega - z_1)(j\omega - z_2)\dots(j\omega - z_m)}}{\underset{\text{póly}}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)\dots(j\omega - p_n)}}$$

$$\hat{P}(j\omega) = K \frac{|j\omega - z_1| \cdot |j\omega - z_2| \dots |j\omega - z_m| e^{j\varphi}}{|j\omega - p_1| \cdot |j\omega - p_2| \dots |j\omega - p_n|}$$

$$\varphi = \arg(j\omega - z_1) + \arg(j\omega - z_2) \dots + \arg(j\omega - z_m) \\ - \arg(j\omega - p_1) - \arg(j\omega - p_2) \dots - \arg(j\omega - p_n)$$

$$P_{dB} = 20 \log P(\omega)$$

$$P_{dB}(\omega) = 20 \left[\log K + \log |j\omega - z_1| + \log |j\omega - z_2| \dots \right. \\ \left. - \log |j\omega - p_1| - \log |j\omega - p_2| \dots \right]$$

$$\varphi(\omega) = \arg(j\omega - z_1) + \arg(j\omega - z_2) + \dots \\ - \arg(j\omega - p_1) - \arg(j\omega - p_2) \dots$$

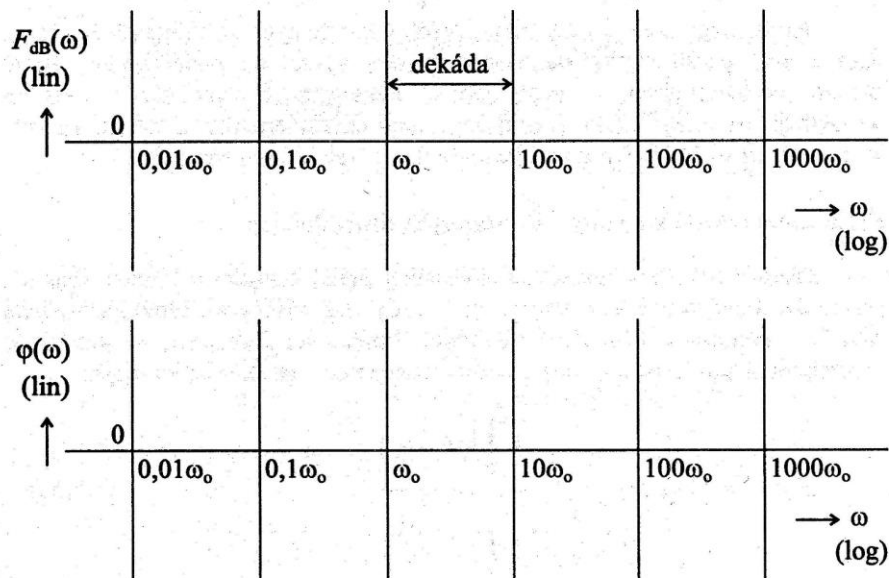
$$\omega_K = -p_K$$

$$\omega_K = -z_K$$

$$(j\omega - p_K) = (j\omega + \omega_K) = \omega_K (1 + j \frac{\omega}{\omega_K}) = \omega_K (1 + j\omega \tau_K)$$

$$\hat{P}(j\omega) = K \frac{\omega_{z1} \cdot \omega_{z2} \dots \omega_{zm} (1 + j \frac{\omega}{\omega_{z1}}) (1 + j \frac{\omega}{\omega_{z2}}) \dots (1 + j \frac{\omega}{\omega_{zm}})}{\omega_{p1} \cdot \omega_{p2} \dots \omega_{pn} (1 + j \frac{\omega}{\omega_{p1}}) (1 + j \frac{\omega}{\omega_{p2}}) \dots (1 + j \frac{\omega}{\omega_{pn}})}$$

protože $\log 0 \rightarrow -\infty$. Svislá osa *modulu* vyjádřeného v *decibelech* $F_{dB}(\omega)$, resp. *fáze* $\varphi(\omega)$ má *lineární* měřítko.



Obr. 3.5.9 Kartézské souřadné systémy pro kreslení frekvenčních charakteristik

Při „ručním“ kreslení *modulové* a *frekvenční* charakteristiky obvodové funkce $F(j\omega)$ vyjdeme z analytického vyjádření obou charakteristik pomocí *kořenových činitelů*. Vyjádřením *modulové frekvenční charakteristiky* (3.5.27) v decibelech [dB], dostaneme:

$$F_{dB}(\omega) = 20 \left(\log |K| + \sum_{k=1}^M \log |j\omega - z_k| - \sum_{k=1}^N \log |j\omega - p_k| \right). \quad (3.5.27)$$

Doplníme-li též *fázovou frekvenční charakteristiku* (3.5.28):

$$\varphi(\omega) = \arg[K] + \sum_{k=1}^M \arg[j\omega - z_k] - \sum_{k=1}^N \arg[j\omega - p_k], \quad (3.5.28)$$

vidíme, že obě charakteristiky vzniknou sčítáním *modulových* resp. *fázových* charakteristik jednotlivých *kořenových činitelů*. Stačí proto, když se naučíme sestavovat *modulové* a *fázové* frekvenční charakteristiky *kořenových činitelů* pro všechny typy *nul* a *pólů*. Budeme přitom používat přibližného grafického vyjádření pomocí *asymptot*, označovaného jako *Bodeho aproximace*.

1) Nulový kořen

Frekvenční charakteristiku kořenového činitele pro *nulový kořen* lze vyjádřit vztahem (3.5.29):

$$F_1(j\omega) = (j\omega - z_k) = (j\omega - 0) = j\omega, \quad (3.5.29)$$

jehož *frekvenčně normovaný* tvar popisuje rovnice (3.5.30):

$$F(j\omega) = \frac{j\omega}{\omega_0}. \quad (3.5.30)$$

Normovací frekvence ω_0 je vhodně zvolený *parametr* dané zobrazované frekvenční charakteristiky.

Modulová frekvenční charakteristika $F(\omega)$ je:

$$F(\omega) = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (3.5.31)$$

a *modulová* frekvenční charakteristika v *decibelech* $F_{dB}(\omega)$:

$$F_{dB}(\omega) = 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right). \quad (3.5.32)$$

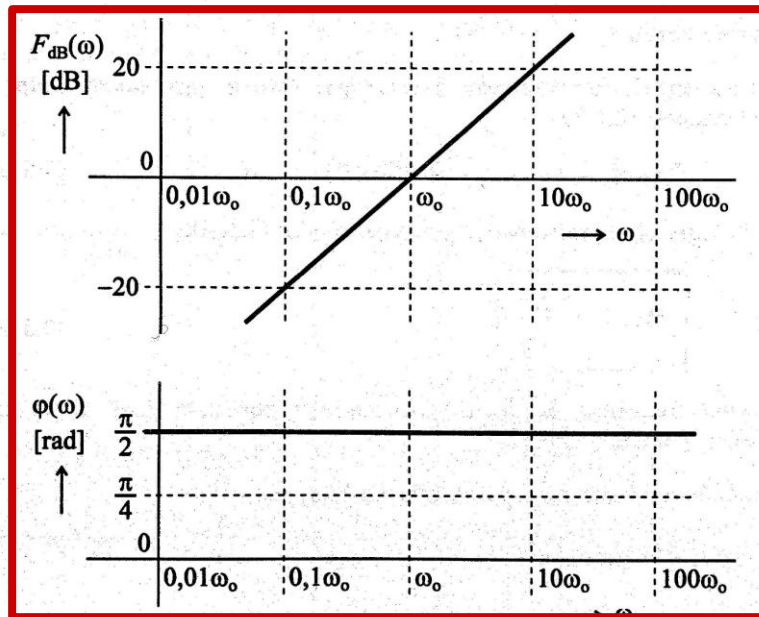
Fázová frekvenční charakteristika $\varphi(\omega)$ je:

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}. \quad (3.5.33)$$

Modulová frekvenční charakteristika v *decibelech* $F_{dB}(\omega)$, vyjádřená rovnicí (3.5.32), a *fázová* frekvenční charakteristika $\varphi(\omega)$, vyjádřená rovnicí (3.5.33), je zobrazená na obr. 3.5.10.

Modulová frekvenční charakteristika v *decibelech* $F_{dB}(\omega)$ (3.5.32) je v daném souřadném systému rovnicí *přímky*, procházející bodem $[\omega_0, 0 \text{ dB}]$. Při každém *desetinásobném* zvýšení frekvence, tj. při zvýšení frekvence o jednu *dekádu*, se zvětší hodnota $F_{dB}(\omega)$ o $20 \log 10 = 20 \text{ dB}$. *Sklon* přímky je tedy $+20 \text{ dB}$ na *dekádu*. V akustice a hudební teorii se též používá *oktávové* logaritmické míry odpovídající *dvojnásobnému* zvýšení frekvence. V tomto případě vyjadřujeme sklon přímky také přibližnou hodnotou $+6 \text{ dB}$ na *oktávu* ($20 \log 2 \approx 6 \text{ dB}$).

Fázová frekvenční charakteristika $\varphi(\omega)$ (3.5.33) je *konstanta*, znázorněná vodorovnou *přímku* na hladině $+\pi/2$ rad.



Obr. 3.5.10 Modulová a fázová frekvenční charakteristika kořenového činitele pro nulový kořen

Pokud má uvažovaný *nulový kořen násobnost n*, platí:

$$F(j\omega) = \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^n \quad (3.5.34)$$

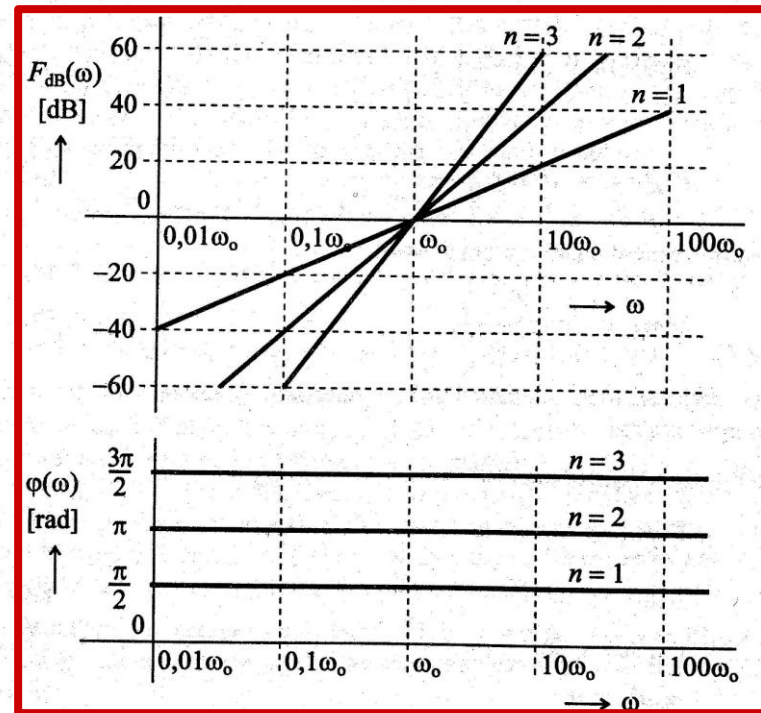
Modulová frekvenční charakteristika $F(\omega)$, resp. $F_{dB}(\omega)$ a *fázová* frekvenční charakteristika $\varphi(\omega)$ je v tomto případě:

$$F(\omega) = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^n, \quad (3.5.35)$$

$$F_{dB}(\omega) = n \cdot 20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right), \quad (3.5.36)$$

$$\varphi(\omega) = n \frac{\pi}{2}. \quad (3.5.37)$$

Frekvenční charakteristiky $F_{dB}(\omega)$ (3.5.36) a $\varphi(\omega)$ (3.5.37) pro $n = 1, 2, 3$ jsou zobrazeny na obr. 3.5.11.



Obr. 3.5.11 Modulové a fázové frekvenční charakteristiky kořenového činitele pro nulový kořen násobnosti $n = 1, 2, 3$

2) Reálný záporný kořen

V případě *reálného záporného* kořene je frekvenční charakteristika jeho kořenového činitele:

$$F_1(j\omega) = (j\omega - z_k) = -z_k \left(1 + \frac{j\omega}{-z_k}\right). \quad (3.5.38)$$

Definováním *normovací* frekvence ω_0 :

$$\omega_0 = -z_k \quad (3.5.39)$$

a *normováním* výrazu (3.5.38) dostaneme:

$$F(j\omega) = 1 + \frac{j\omega}{\omega_0}. \quad (3.5.40)$$

Modulová frekvenční charakteristika $F(\omega)$, resp. $F_{dB}(\omega)$ je:

$$F(\omega) = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}, \quad (3.5.41)$$

$$F_{dB}(\omega) = 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad (3.5.42)$$

a fázová frekvenční charakteristika $\varphi(\omega)$:

$$\varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right). \quad (3.5.43)$$

Průběhy frekvenčních charakteristik vyjádříme zjednodušeně pomocí tzv. Bodeho aproximace:

Je-li $\omega \ll \omega_0$ přibližně platí:

$$\underline{F(j\omega)} \cong 1, \quad (3.5.44)$$

$$F(\omega) \cong 1, \quad (3.5.45)$$

$$F_{dB}(\omega) \cong 0, \quad (3.5.46)$$

$$\varphi(\omega) \cong 0. \quad (3.5.47)$$

Frekvenční charakteristiky $F_{dB}(\omega)$ a $\varphi(\omega)$ je možné za dané frekvenční podmínky aproximovat vodorovnými přímkami na nulových hladinách.

Je-li $\omega \gg \omega_0$ lze přibližně psát:

$$\underline{F(j\omega)} \cong \frac{j\omega}{\omega_0}, \quad (3.5.48)$$

$$F(\omega) \cong \frac{\omega}{\omega_0}, \quad (3.5.49)$$

$$F_{dB}(\omega) \cong 20 \log \frac{\omega}{\omega_0}, \quad (3.5.50)$$

$$\varphi(\omega) \cong \frac{\pi}{2}. \quad (3.5.51)$$

Frekvenční charakteristiky se v tomto případě blíží charakteristikám kořenového činitele s nulovým kořenem.

Ke splnění frekvenčních podmínek pro možné použití jednotlivých aproximací stačí, když $\omega \leq 0,1\omega_0$, resp. když $\omega \geq 10\omega_0$. V případě, že bychom

uvedené aproximace chtěli použít i v rozsahu frekvencí $0,1\omega_0 \leq \omega \leq 10\omega_0$, je nutné výpočtem zkontrolovat maximální odchylku skutečné frekvenční charakteristiky (3.5.42), resp. (3.5.43) od příslušné aproximace. Lze oprávněně očekávat, že maximální odchylka nastává na frekvenci $\omega = \omega_0$. Dosazením do rovnice (3.5.42) dostáváme odchylku modulové charakteristiky:

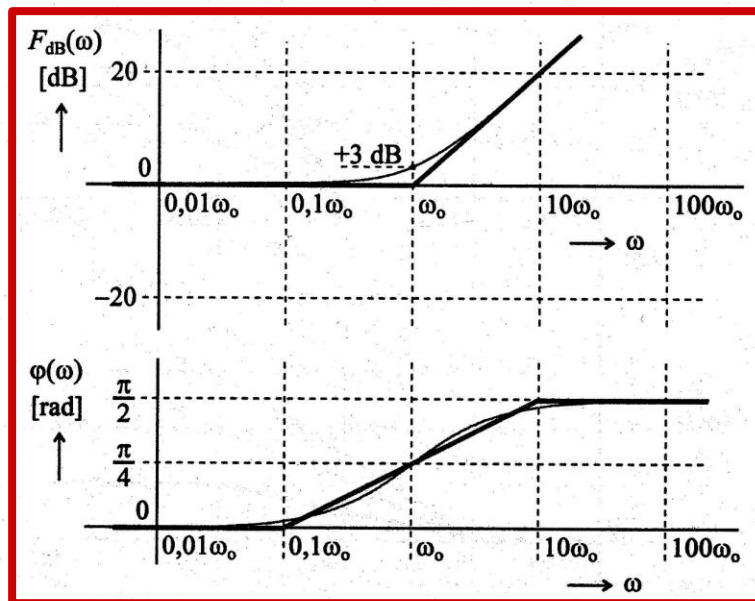
$$\Delta_{F_{dB}}(\omega_0) = F_{dB}(\omega_0) - F_{dB,ap}(\omega_0) = 20 \log \sqrt{2} - 0 = +3 \text{ dB}. \quad (3.5.52)$$

Dosazením do rovnice (3.5.43) dostáváme odchylku fázové charakteristiky:

$$\Delta_{\varphi}(\omega_0) = \varphi(\omega_0) - \varphi_{ap}(\omega_0) = \arctg(1) - \left\{ \frac{0}{\pi/2} \right. = \pm \pi/4 \text{ rad}. \quad (3.5.53)$$

Odchylka modulové charakteristiky +3 dB je relativně malá, proto uvedené aproximace modulové charakteristiky jsou přijatelné i v intervalu frekvencí $0,1\omega_0 \leq \omega \leq 10\omega_0$. Odchylka fázové charakteristiky $\pm \pi/4$ rad je však příliš velká, proto uvedené aproximace fázové charakteristiky doplníme v daném intervalu frekvencí $0,1\omega_0 \leq \omega \leq 10\omega_0$ šikmou asymptotou se sklonem $+\pi/4$ na dekádu, procházející body $[0,1\omega_0, 0]$ a $[10\omega_0, +\pi/2]$.

Modulová a fázová frekvenční charakteristika kořenového činitele reálného záporného kořene a jejich Bodeho aproximace jsou na obr. 3.5.12.



Obr. 3.5.12 Modulová a fázová frekvenční charakteristika kořenového činitele pro reálný záporný kořen

Pokud má *reálný záporný kořen násobnost* n , vztah (3.5.54) vyjadřuje *normovanou* frekvenční charakteristiku jeho kořenového činitele:

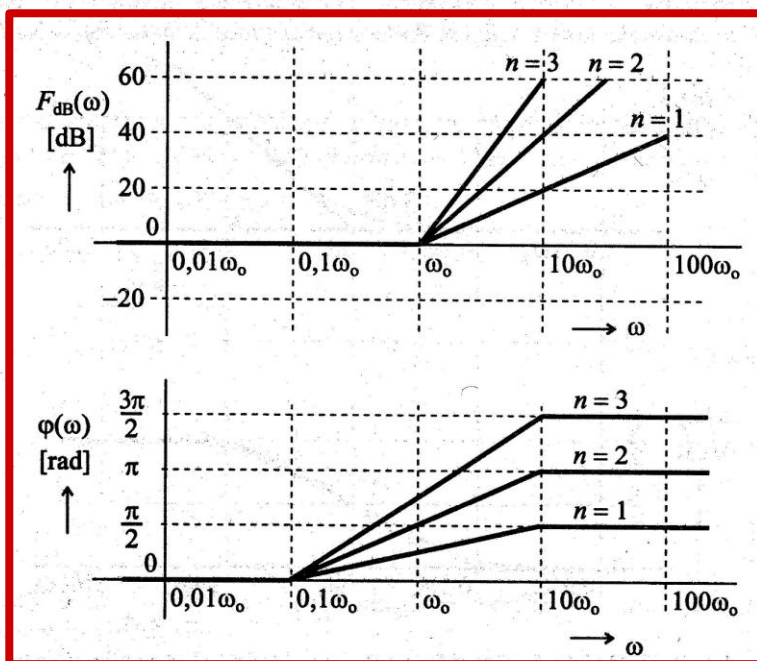
$$F(j\omega) = \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_0}\right)^n \quad (3.5.54)$$

Modulová frekvenční charakteristika $F(\omega)$, resp. $F_{dB}(\omega)$ a *fázová* frekvenční charakteristika $\varphi(\omega)$ je:

$$F(\omega) = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}^n, \quad (3.5.55)$$

$$F_{dB}(\omega) = n \cdot 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}, \quad (3.5.56)$$

$$\varphi(\omega) = n \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right). \quad (3.5.57)$$



Obr. 3.5.13 Modulové a fázové frekvenční charakteristiky kořenového činitele pro reálný záporný kořen násobnosti $n = 1, 2, 3$

Bodeho aproximace frekvenčních charakteristik $F_{dB}(\omega)$ (3.5.56) a $\varphi(\omega)$ (3.5.57) pro $n = 1, 2, 3$ jsou zobrazeny na obr. 3.5.13. Násobnost kořene $n > 1$ má vliv na sklon šikmých asymptot a na nenulové úrovně vodorovných asymptot Bodeho aproximací frekvenčních charakteristik. Násobností $n > 1$ se též n -násobně zvětšují odchylky skutečných frekvenčních charakteristik od jejich aproximací. Odchylka skutečné modulové frekvenční charakteristiky od její aproximace, která dosahuje na frekvenci ω_0 svého maxima, činí $+n \cdot 3$ dB.

3) Reálný kladný kořen (jen nula)

V případě *reálného kladného* kořene je frekvenční charakteristika jeho kořenového činitele:

$$F_1(j\omega) = (j\omega - z_k) = -z_k \left(1 - \frac{j\omega}{z_k}\right). \quad (3.5.58)$$

Definováním *normovací* frekvence ω_0 :

$$\omega_0 = z_k \quad (3.5.59)$$

a *normováním* výrazu (3.5.58) vzhledem k $(-\omega_0)$ dostaneme:

$$F(j\omega) = 1 - \frac{j\omega}{\omega_0}. \quad (3.5.60)$$

Modulová frekvenční charakteristika $F(\omega)$, resp. $F_{dB}(\omega)$ je:

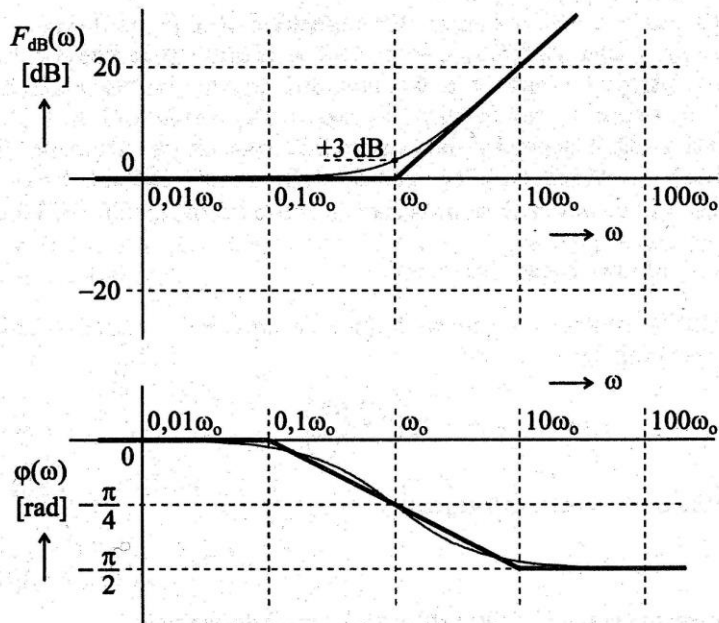
$$F(\omega) = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}, \quad (3.5.61)$$

$$F_{dB}(\omega) = 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad (3.5.62)$$

a *fázová* frekvenční charakteristika $\varphi(\omega)$:

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right). \quad (3.5.63)$$

Modulová a *fázová* frekvenční charakteristika kořenového činitele *reálného kladného* kořene a jejich *Bodeho aproximace* jsou na obr. 3.5.14. *Modulová* charakteristika je *stejná* jako v případě *reálného záporného* kořene, *fázová* frekvenční charakteristika má opačné *znaménko*.



Obr. 3.5.14 Modulová a fázová frekvenční charakteristika kořenového činitele pro reálný kladný kořen

Pokud má *reálný kladný kořen násobnost* n , vztah (3.5.64) vyjadřuje *normovanou* frekvenční charakteristiku jeho kořenového činitele:

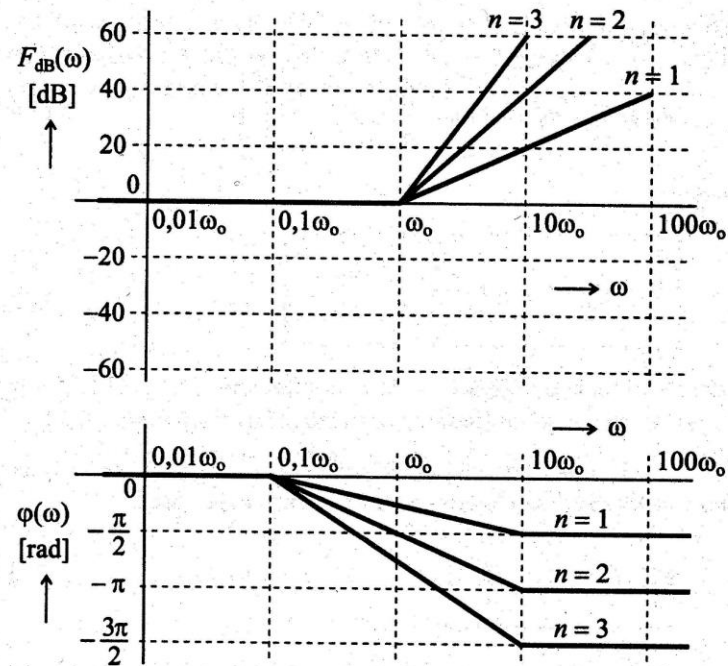
$$\mathbf{F(j\omega) = \left(1 - \frac{j\omega}{\omega_0}\right)^n}, \quad (3.5.64)$$

$$F(\omega) = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}^n, \quad (3.5.65)$$

$$F_{dB}(\omega) = n \cdot 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}, \quad (3.5.66)$$

$$\varphi(\omega) = -n \arctg\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right). \quad (3.5.67)$$

Bodeho aproximace frekvenčních charakteristik $F_{dB}(\omega)$ (3.5.66) a $\varphi(\omega)$ (3.5.67) pro $n = 1, 2, 3$ jsou zobrazeny na obr. 3.5.15.



Obr. 3.5.15 Modulové a fázové frekvenční charakteristiky kořenového činitele pro reálný kladný kořen násobnosti $n = 1, 2, 3$

4) Dvojice komplexně sdružených kořenů (se zápornou reálnou částí)

Frekvenční charakteristika součinu kořenových činitelů *dvojice komplexně sdružených kořenů* $F_2(j\omega)$ má tvar:

$$\begin{aligned} F_2(j\omega) &= (j\omega - z_k)(j\omega - z_k^*) = (j\omega)^2 + j\omega(-z_k - z_k^*) + z_k z_k^* = \\ &= (j\omega)^2 + j\omega(-2 \operatorname{Re}[z_k]) + |z_k|^2 = \\ &= |z_k|^2 \left[1 + 2 \frac{-\operatorname{Re}[z_k]}{|z_k|} \cdot \frac{j\omega}{|z_k|} + \left(\frac{j\omega}{|z_k|}\right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.5.68)$$

Definujeme *normovací frekvenci* ω_0 a *poměrný parametr* a :

$$\omega_0 = |z_k|, \quad (3.5.69)$$

$$a = \frac{-\operatorname{Re}[z_k]}{|z_k|}, \quad (3.5.70)$$

funkci $F_2(j\omega)$ upravíme :

$$F_2(j\omega) = \omega_0^2 \left[1 + 2a \frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0} \right)^2 \right] \quad (3.5.71)$$

a normujeme :

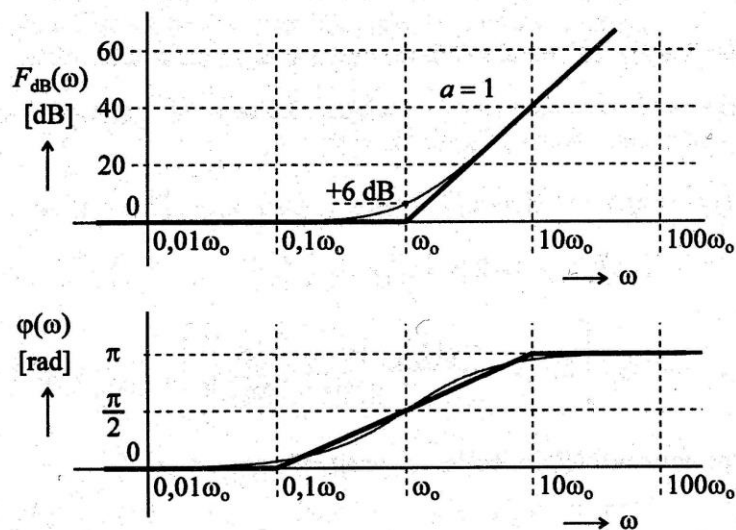
$$F(j\omega) = 1 + 2a \frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0} \right)^2 \quad (3.5.72)$$

Frekvenční charakteristika funkce *normované* $F(j\omega)$ (3.5.72) je silně závislá na *parametru* a , jehož hodnota se může měnit v intervalu $\langle 0,1 \rangle$.

Je-li $a = 1$, mění se dvojice komplexně sdružených kořenů na jeden dvojnásobný reálný záporný kořen ($n = 2$) a funkce $F(j\omega)$ na:

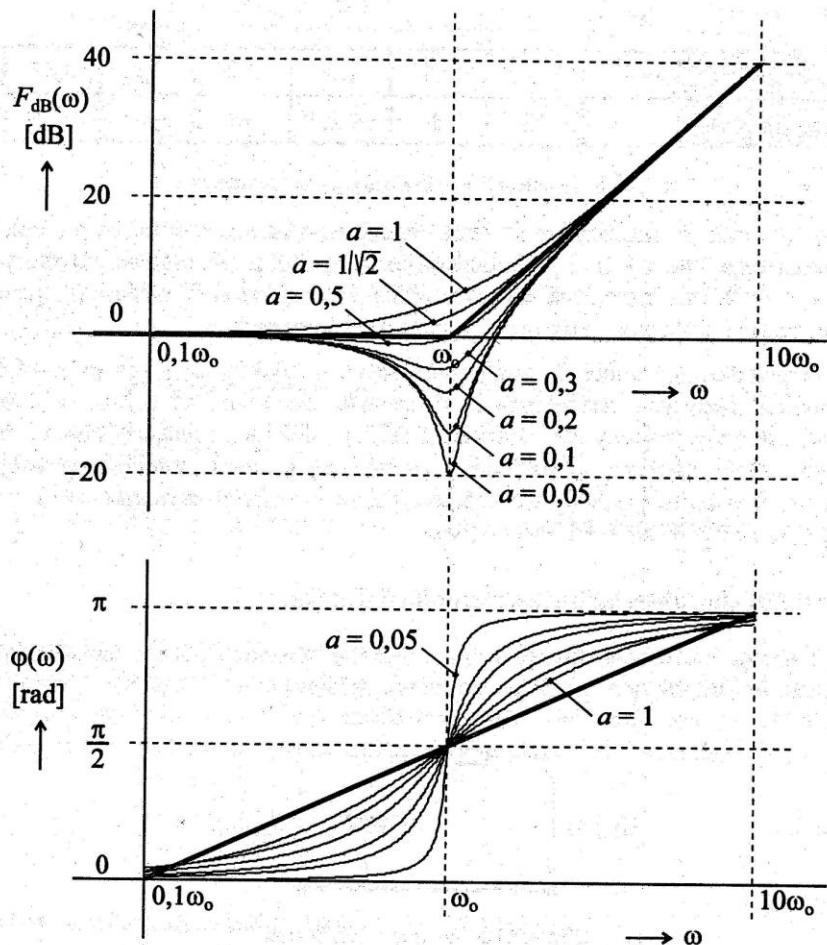
$$F(j\omega) = \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_0} \right)^2 \quad (3.5.73)$$

Modulová a fázová frekvenční charakteristika $F_{dB}(\omega)$, resp. $\varphi(\omega)$ pro $a = 1$ včetně jejich Bodeho aproximací jsou zobrazeny na obr. 3.5.16.



Obr. 3.5.16 Modulová a fázová frekvenční charakteristiky kořenového činitele pro dvojnásobný reálný záporný kořen ($a = 1$)

Je-li $0 \leq a < 1$, tvoří oba kořeny skutečně dvojici komplexně sdružených kořenů. Modulové a fázové frekvenční charakteristiky $F_{dB}(\omega)$, resp. $\varphi(\omega)$ pro různé hodnoty parametru a jsou na obr. 3.5.17.



Obr. 3.5.17 Modulové a fázové frekvenční charakteristiky součinu kořenových činitelů pro dvojici komplexně sdružených kořenů se zápornou reálnou částí

Pro relativně velké hodnoty parametru a ($0,5 \leq a \leq 1$) je Bodeho aproximace modulových charakteristik pomocí asymptot, odvozená pro $a = 1$ a znázorněná též na obr. 3.5.16, relativně dobrá. Pro relativně malé hodnoty parametru a ($a < 0,3$) se skutečné modulové charakteristiky v okolí frekvence ω_0 od Bodeho aproximace značně odlišují. Odchytku skutečných modulových charakteristik od jejich aproximace na frekvenci $\omega = \omega_0$ (tj. v průsečíku obou

asymptot) v závislosti na velikosti parametru a vyjadřuje rovnice (3.5.74) a znázorňuje tab. 3.5.1.

$$\Delta_{FdB,max} = 20 \log(2a) \quad (3.5.74)$$

a	1	$1/\sqrt{2}$	0,5	0,3	0,2	0,1	0,05
$\Delta_{FdB,max}$ [dB]	+6	+3	0	-4,437	-8	-14	-20

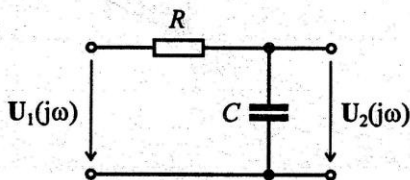
Tab. 3.5.1 Závislost odchylky $\Delta_{FdB,max}$ na parametru a

Je-li $a \geq 1/\sqrt{2}$, je skutečná modulová charakteristika *monotónní*, nemá žádný lokální extrém. Pro $a = 1/\sqrt{2}$ je modulová charakteristika tzv. *maximálně plochá*. Je-li $a < 1/\sqrt{2}$, má modulová charakteristika *lokální extrém* (minimum), jehož poloha se blíží s klesající hodnotou parametru a frekvenci ω_0 .

Pro relativně velké hodnoty parametru a ($0,5 \leq a \leq 1$) je *Bodeho aproximace* fázových charakteristik v intervalu frekvencí od $0,1\omega_0$ do $10\omega_0$ pomocí *šikmé asymptoty* se sklonem $+\pi/2$ na dekádu, relativně dobrá. Pro relativně malé hodnoty parametru a ($a < 0,3$) je však mnohem přesnější aproximací *skoková funkce*, tvořená *dvojicí vodorovných asymptot* $\varphi(\omega) = 0$ pro $\omega \leq \omega_0$, resp. $\varphi(\omega) = +\pi$ pro $\omega \geq \omega_0$.

Frekvenční charakteristiky integračního RC článku

Integrační RC článek je na obr. 3.5.18. Frekvenční přenos napětí $P(j\omega)$ *integračního RC článku* vyjadřuje rovnice (3.5.75).

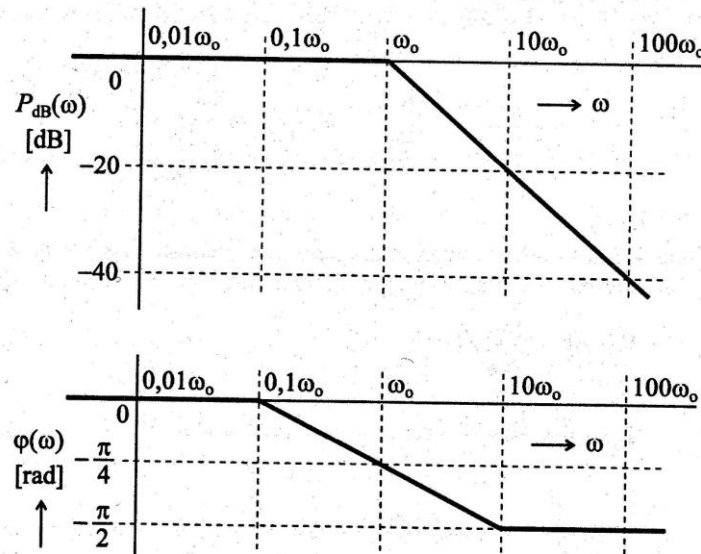


Obr. 3.5.18 Integrační RC článek

$$P(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega CR}$$

$$= \left| \omega_0 = \frac{1}{CR} \right| = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_0}} = \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_0} \right)^{-1} \quad (3.5.75)$$

Modulová a fázová frekvenční charakteristika přenosu $P(j\omega)$ integračního RC článku zkonstruovaná pomocí asymptot je na obr. 3.5.19.



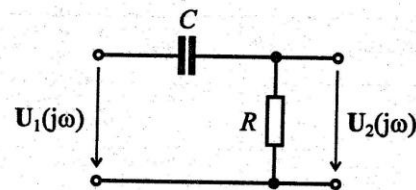
Obr. 3.5.19 Modulová a fázová frekvenční integračního RC článku

Integrační RC článek funguje jako skutečný *integrátor* pouze v případě, že frekvenční spektrum vstupního napětí svým frekvenčním rozsahem splňuje podmínku $\omega \gg \omega_0$. V tomto případě se přenos $P(j\omega)$ *integračního RC článku* blíží přenosu *ideálního integrátoru* (šikmá asymptota -20 dB na dekádu):

$$P(j\omega) \cong \left(\frac{j\omega}{\omega_0} \right)^{-1} \quad (3.5.76)$$

Frekvenční charakteristiky derivačního RC článku

Derivační RC článek je na obr. 3.5.20.



Obr. 3.5.20 Derivační RC článek

Frekvenční přenos napětí $P(j\omega)$ derivačního RC článku je:

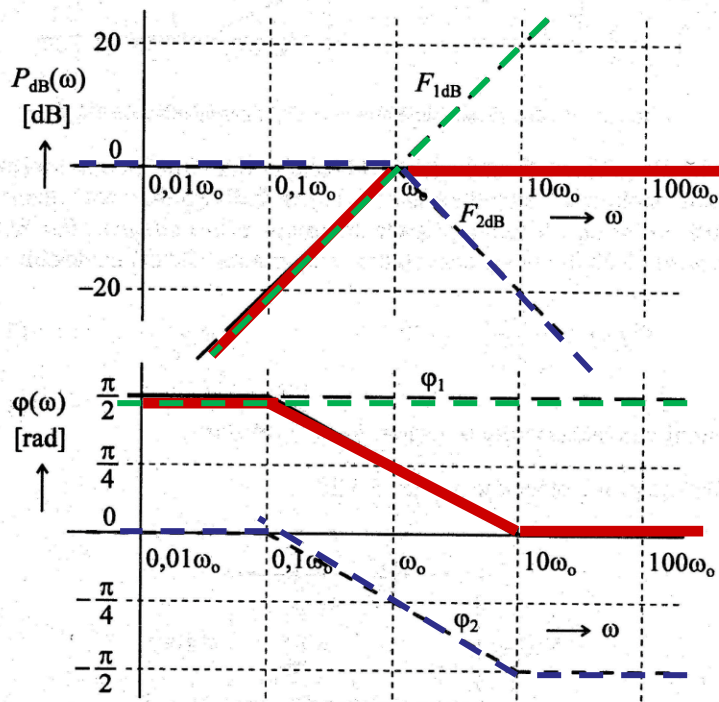
$$P(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{R}{\frac{1}{j\omega C} + R} = \frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR} =$$

$$= \left| \omega_0 = \frac{1}{CR} \right| = \frac{j\omega}{\omega_0} = \frac{j\omega}{\omega_0} \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_0}\right)^{-1} \quad (3.5.77)$$

Modulovou a fázovou frekvenční charakteristiku přenosu $P(j\omega)$ zkonstruujeme jako součet *modulových*, resp. *fázových* charakteristik funkcí $F_1(j\omega)$ a $F_2(j\omega)$:

$$F_1(j\omega) = \frac{j\omega}{\omega_0}, \quad (3.5.78)$$

$$F_2(j\omega) = \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_0}\right)^{-1}. \quad (3.5.79)$$



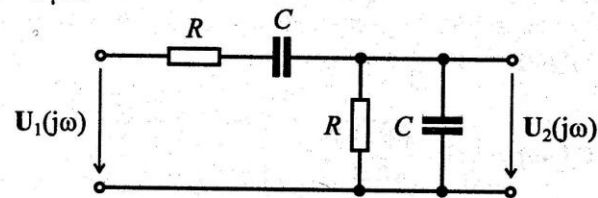
Obr. 3.5.21 Modulová a fázová frekvenční charakteristika derivačního RC článku

Derivační RC článek funguje jako skutečný *derivátor* pouze v případě, že frekvenční spektrum vstupního napětí svým frekvenčním rozsahem splňuje podmínku $\omega \ll \omega_0$. V tomto případě se přenos $P(j\omega)$ *derivačního* RC článku blíží přenosu ideálního *derivátoru* (šikmá asymptota +20 dB na dekádu):

$$P(j\omega) \cong \frac{j\omega}{\omega_0}. \quad (3.5.80)$$

Frekvenční charakteristiky Wienova článku

Na obr. 3.5.22 je zapojení tzv. *Wienova* článku. Jeho parametry volíme $R = 1 \text{ k}\Omega$, $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$.



Obr. 3.5.22 Wienův článek

Frekvenční přenos napětí $P(j\omega)$ *Wienova* článku je:

$$P(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C} + \frac{R}{1 + j\omega CR}} = \frac{j\omega CR}{1 + 3j\omega CR + (j\omega CR)^2} =$$

$$= \left| \begin{aligned} 1 + 3j\omega CR + (j\omega CR)^2 &= 0 \\ (j\omega CR)_{1,2} &= \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2} = \begin{cases} -0,384 \\ -2,616 \end{cases} \end{aligned} \right| =$$

$$= \frac{j\omega CR}{(0,384 + j\omega CR)(2,616 + j\omega CR)} = \frac{j\omega CR}{\left(1 + \frac{j\omega CR}{0,384}\right)\left(1 + \frac{j\omega CR}{2,616}\right)} =$$

$$= \left| \begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{CR} = 1000 \text{ s}^{-1} \\ \omega_2 &= \frac{0,384}{CR} = 384 \text{ s}^{-1} \\ \omega_3 &= \frac{2,616}{CR} = 2616 \text{ s}^{-1} \end{aligned} \right| = \frac{j\omega}{\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_2}\right)\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_3}\right)} =$$

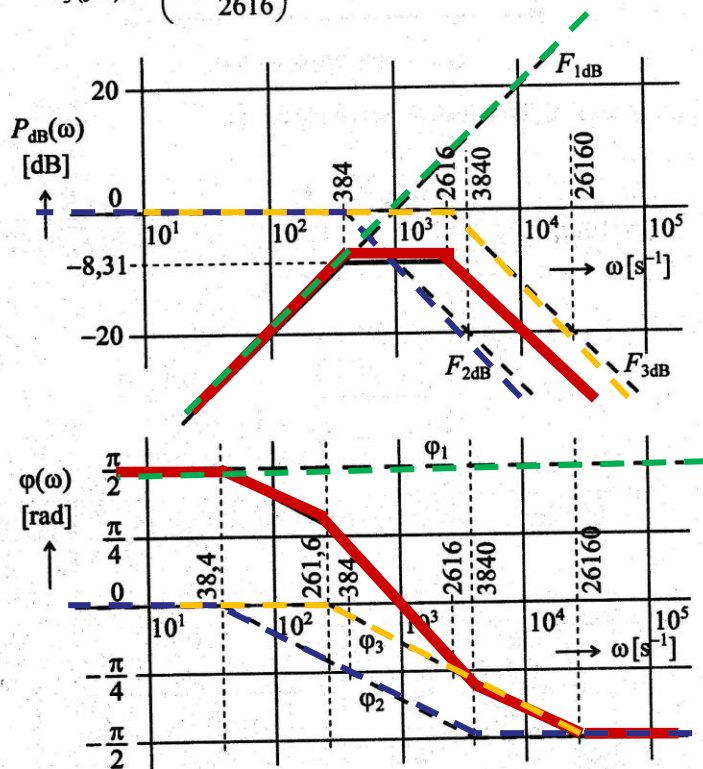
$$\frac{\frac{j\omega}{1000}}{\left(1 + \frac{j\omega}{384}\right)\left(1 + \frac{j\omega}{2616}\right)} = \left(\frac{j\omega}{1000}\right)\left(1 + \frac{j\omega}{384}\right)^{-1}\left(1 + \frac{j\omega}{2616}\right)^{-1}. \quad (3.5.81)$$

Modulovou a fázovou frekvenční charakteristiku přenosu $P(j\omega)$ zkonstruujeme jako součet modulových, resp. fázových charakteristik tří dílčích funkcí $F_1(j\omega)$, $F_2(j\omega)$ a $F_3(j\omega)$:

$$F_1(j\omega) = \frac{j\omega}{1000}, \quad (3.5.82)$$

$$F_2(j\omega) = \left(1 + \frac{j\omega}{384}\right)^{-1}, \quad (3.5.83)$$

$$F_3(j\omega) = \left(1 + \frac{j\omega}{2616}\right)^{-1}. \quad (3.5.84)$$



Obr. 3.5.23 Modulová a fázová frekvenční charakteristika Wienova článku

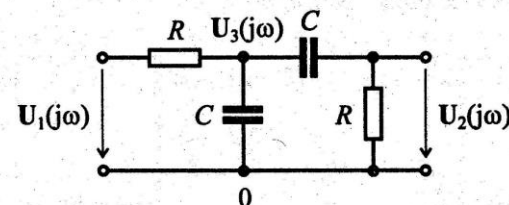
Hladinu *vodorovné* asymptoty *modulové* frekvenční charakteristiky určuje funkce (3.5.81), zjednodušená pro případ, že $384 \text{ s}^{-1} < \omega < 2616 \text{ s}^{-1}$:

$$P(j\omega) \cong \left(\frac{j\omega}{1000}\right)\left(\frac{j\omega}{384}\right)^{-1}(1)^{-1} = \frac{384}{1000} = 0,384, \quad (3.5.85)$$

$$P_{\text{dB}}(\omega) \cong 20 \log(0,384) = -8,31 \text{ dB}. \quad (3.5.86)$$

Frekvenční charakteristiky RC-CR článku

Stejný přenos napětí $P(j\omega)$ a tím i *modulovou* a *fázovou* frekvenční charakteristiku přenosu jako Wienův článek má i RC-CR článek (obr. 3.5.24).



Obr. 3.5.24 RC-CR článek

$$\frac{U_2(j\omega)}{R} + [U_2(j\omega) - U_3(j\omega)]j\omega C = 0 \quad (3.5.87)$$

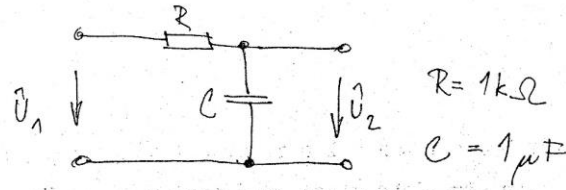
$$\frac{U_3(j\omega) - U_1(j\omega)}{R} + U_3(j\omega)j\omega C + [U_3(j\omega) - U_2(j\omega)]j\omega C = 0 \quad (3.5.88)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R} + j\omega C & -j\omega C \\ -j\omega C & \frac{1}{R} + 2j\omega C \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_2(j\omega) \\ U_3(j\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ U_1(j\omega) \end{bmatrix} \quad (3.5.89)$$

$$U_2(j\omega) = \frac{\frac{U_1(j\omega)}{R} j\omega C}{\frac{1}{R^2} + \frac{3j\omega C}{R} + (j\omega C)^2} \quad (3.5.90)$$

$$P(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{j\omega CR}{1 + 3j\omega C + (j\omega CR)^2} \quad (3.5.91)$$

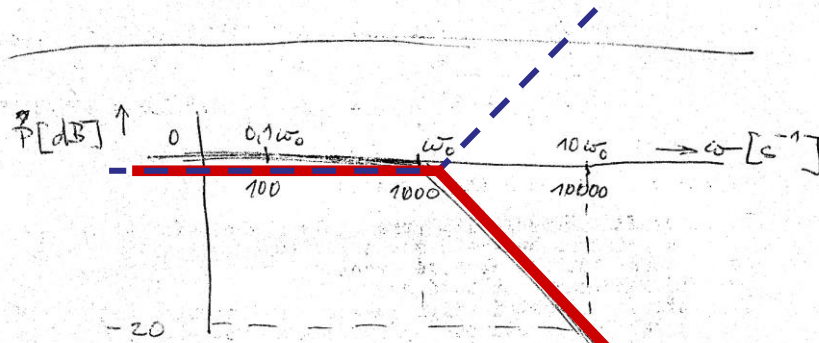
PF:



$$\hat{P}(j\omega) = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega CR}$$

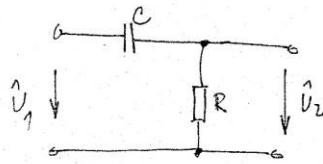
$1 + j\frac{\omega}{\omega_0}$
reilly záporný
pól

$$\omega_0 = \frac{1}{CR} = 1000 \text{ s}^{-1}$$



Př.:

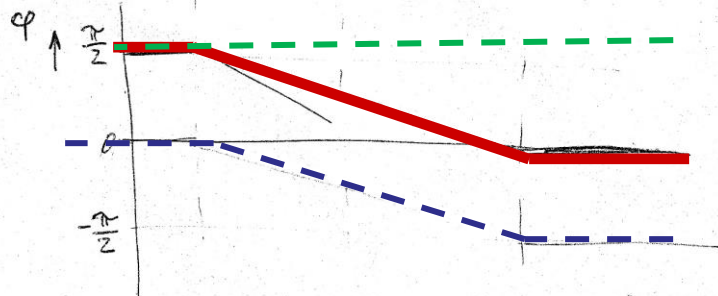
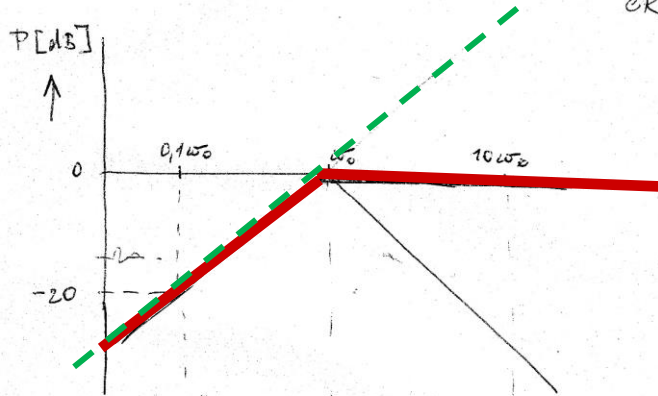
②

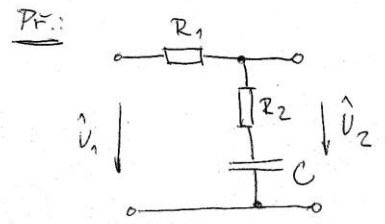


derivace člank

$$\hat{T}(j\omega) = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR} = \frac{j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

nula a pól
záporní kladný pól
 $\omega_0 = \frac{1}{CR}$

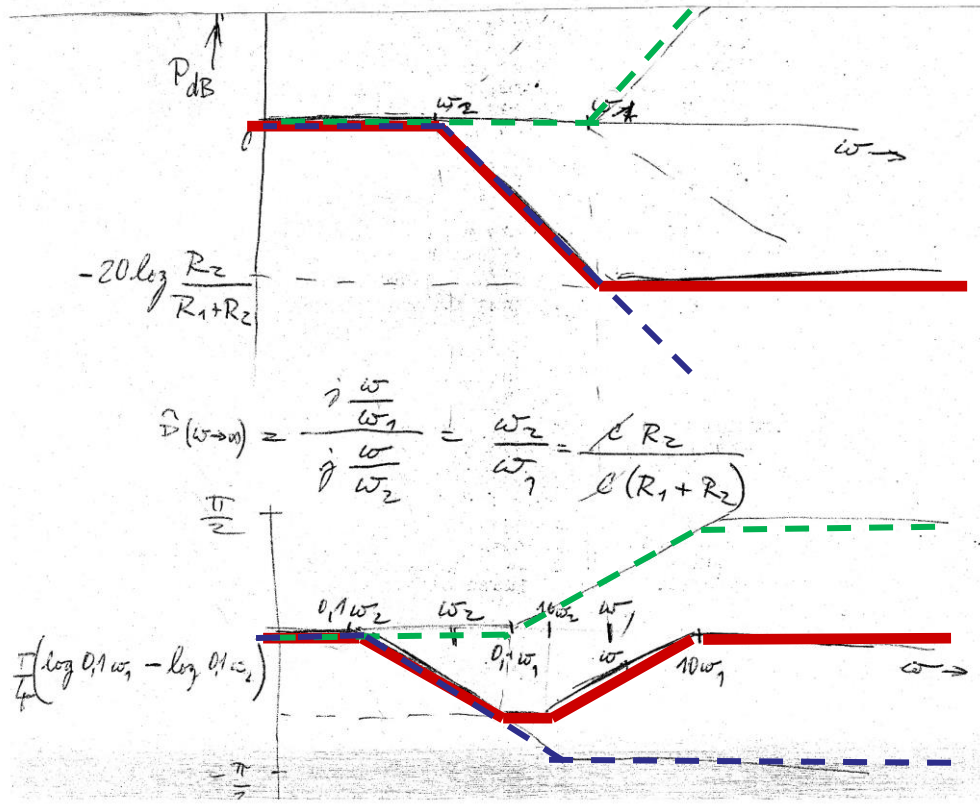




$$\hat{P} = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = \frac{R_2 + \frac{1}{j\omega C}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1 + j\omega C R_2}{1 + j\omega C (R_1 + R_2)}$$

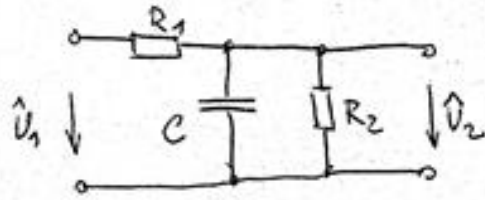
$$\omega_1 = \frac{1}{C R_2} \quad \omega_2 = \frac{1}{C (R_1 + R_2)}$$

$\omega_2 < \omega_1$!



PF:

$$\frac{R_2}{j\omega C} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{j\omega C} + j\omega C R_2}$$



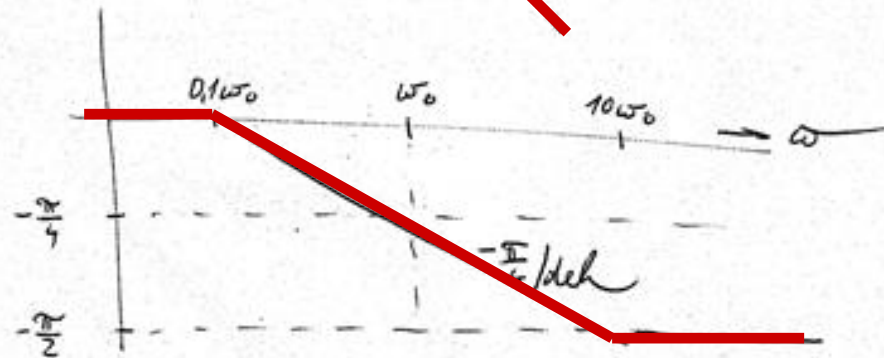
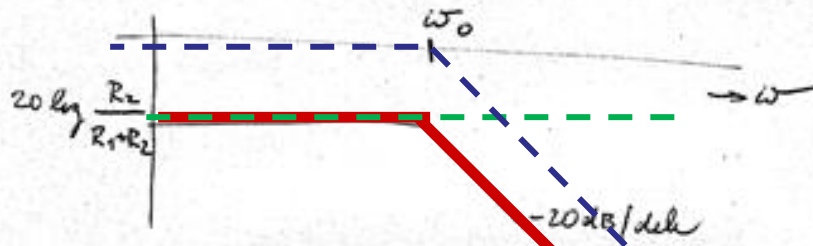
$$\hat{P} = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = \frac{R_2}{R_1 + \frac{R_2}{1 + j\omega C R_2}} =$$

$$= \frac{R_2}{R_2 + R_1 + j\omega C R_1 R_2} =$$

$$= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{1 + j\omega C \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

$$\tau = C R_1 \parallel R_2$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\tau}$$



$$\bar{F} = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = ?$$

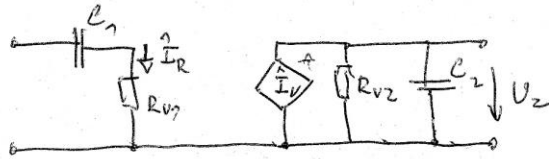
$\hat{I}_V = -100 \hat{I}_R$ zdroj prądu
Fizyczny prąd

$$R_{v1} = 1000 \Omega$$

$$R_{v2} = 100 \Omega$$

$$C_1 = 1 \mu F$$

$$C_2 = 10 \mu F$$

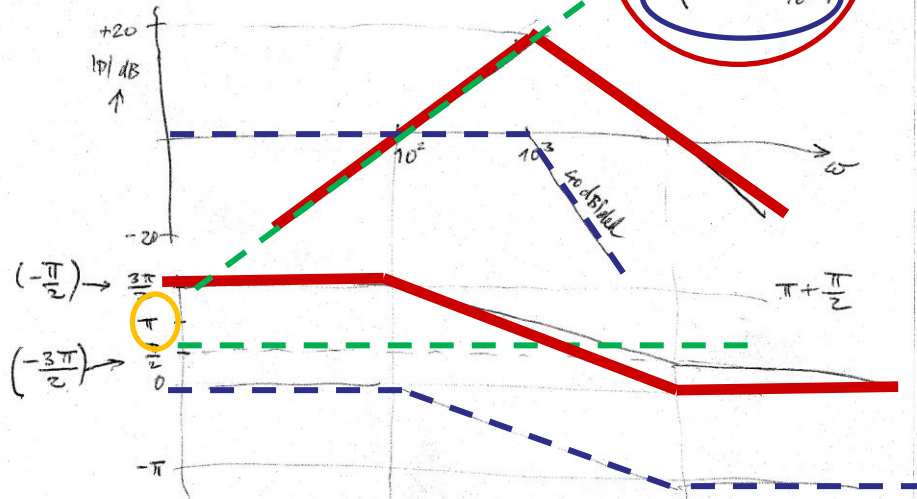


$$\bar{z} = \frac{R_{v2}}{j\omega C_2} = \frac{R_{v2}}{R_{v2} + \frac{1}{j\omega C_2}} = \frac{R_{v2}}{1 + j\omega C_2 R_{v2}}$$

$$\hat{U}_2 = \bar{z} \hat{I}_V = -100 \hat{I}_R \frac{R_{v2}}{1 + j\omega C_2 R_{v2}}$$

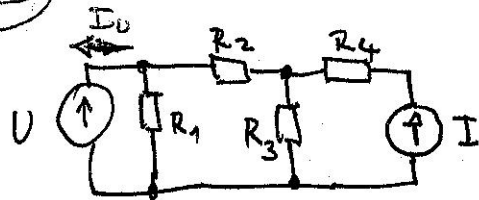
$$\hat{I}_R = \frac{\hat{U}_1}{R_{v1} + \frac{1}{j\omega C_1}} = \hat{U}_1 \frac{j\omega C_1}{1 + j\omega R_{v1} C_1}$$

$$\bar{F} = -100 \frac{j\omega C_1}{1 + j\omega R_{v1} C_1} \cdot \frac{R_{v2}}{1 + j\omega R_{v2} C_2} = \frac{j\omega \frac{R_{v2} C_1}{10^2}}{(1 + j\omega \frac{1}{10^2})^2}$$



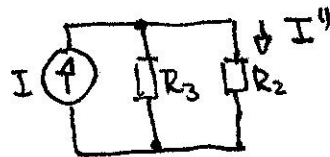
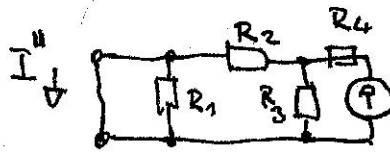
SUS

3

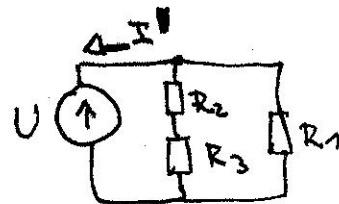
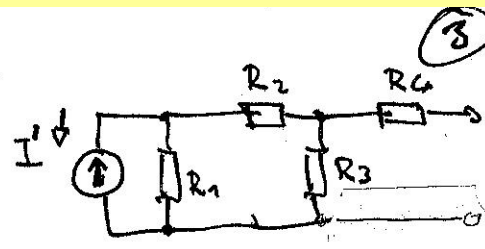


$$P_U = U(I' + I'') = 0,06 \text{ W}$$

$$P_U = U \cdot I_0 = U \underbrace{(I' + I'')}_{I_0}$$



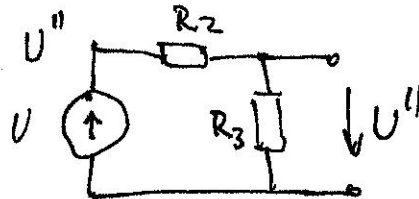
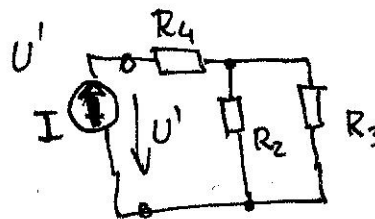
$$I'' = I \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 0,006$$



$$I' = \frac{U}{\frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}}$$

$$P_I = I \cdot U_I$$

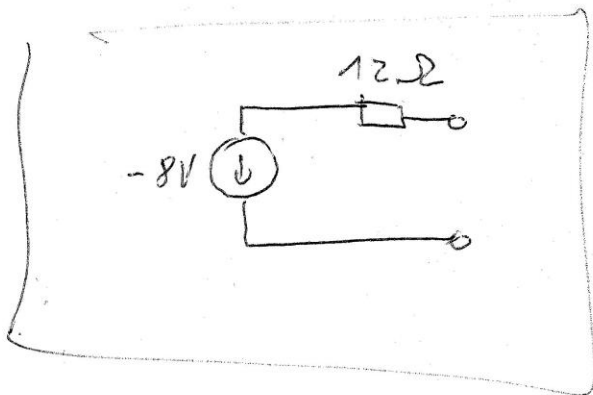
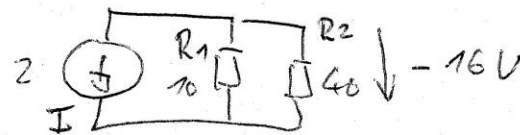
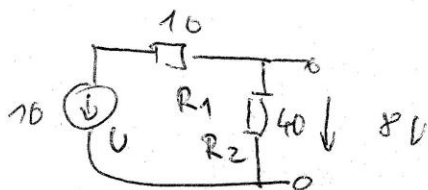
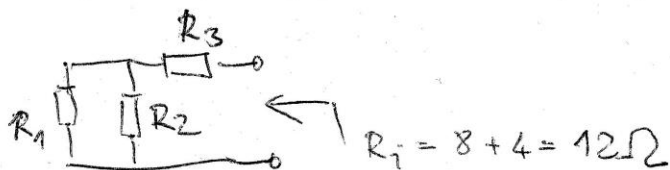
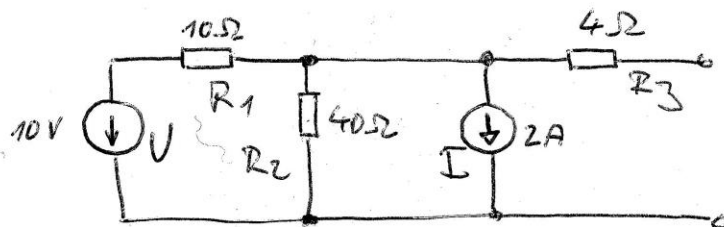
$$P_I = I(U_I' + U_I'') = 0,49 \text{ W}$$



$$U' = I \left(R_4 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \right) = 52$$

$$U'' = -U \frac{R_3}{R_2 + R_3} = -3$$

Nalezněte parametry Théveninova
náhradního zapojení.

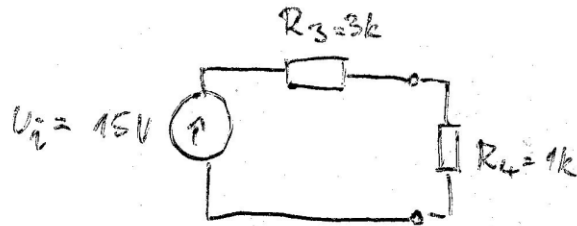
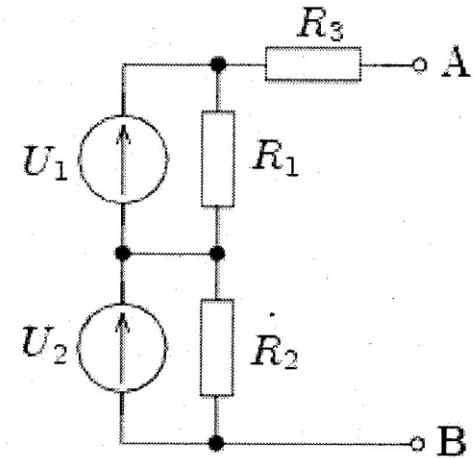


$$U_i = U \frac{R_2}{R_1 + R_2} - I \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$R_i = R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Pro obvody podle obrázků v tabulce nakreslete z hlediska výstupních svorek A a B náhradní zapojení podle Théveninova teoremu a určete jeho parametry. Vypočítejte výstupní napětí a výkon v zátěži uvedeného obvodu, je-li zatížen rezistorem o odporu R_4 .

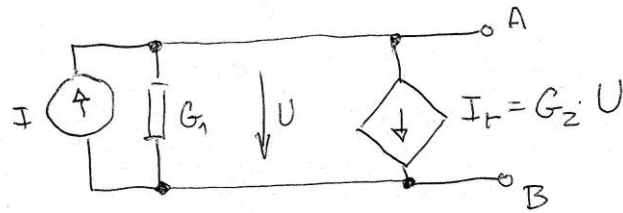
$$R_1 = 1 \text{ k}\Omega, R_2 = 2 \text{ k}\Omega, R_3 = 3 \text{ k}\Omega, R_4 = 1 \text{ k}\Omega, \\ U_1 = 5 \text{ V}, U_2 = 10 \text{ V}$$



$$U_{AB} = -U_1 \frac{R_4}{R_3 + R_4} = 15 \frac{1}{4} = -3,75 \text{ V}$$

$$U_i = -15 \text{ V} \quad \textcircled{1}$$

$$P_{R_4} = \frac{U_{R_4}^2}{R_4} = \frac{3,75^2}{1000} = 14,1 \cdot 10^{-3} \text{ W}$$



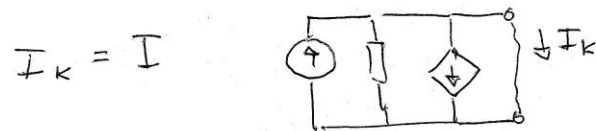
$$G_1 = 1 \text{ mS}$$

$$G_2 = 2 \text{ mS}$$

$$I = 5 \text{ mA}$$

$$U G_1 + U G_2 - I = 0$$

$$U_P = U = \frac{I}{G_1 + G_2} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-3}} = 1,667 \text{ V}$$



$$R_i = \frac{U_P}{I_k} = \frac{1}{G_1 + G_2} = 333,3 \text{ } \Omega$$

Thévenin

