

X31ZZS – 3. PŘEDNÁŠKA

6. října 2014

- **Periodické průběhy**
- **Fourierovy řady**
- **Spektrum**
- **Barva zvuku**
- **Aplikace**



Fourierovy řady

- ***Jean Baptiste Fourier***
(francouzský matematik 1768 - 1830)

- ***Harmonická analýza***

Libovolný *periodický* signál lze rozložit na jednotlivé harmonické složky.



Fourierovy řady

- ***Jean Baptiste Fourier***
(francouzský matematik 1768 - 1830)

- ***Harmonická analýza***

Libovolný *periodický* signál lze rozložit na jednotlivé harmonické složky.

- ***Harmonická syntéza***

Kombinací harmonických složek lze vytvořit prakticky libovolný *periodický* signál.

Fourierovy řady

- *Trigonometrický tvar Fourierových řad*

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)]$$

$a_0/2$...stejnoseměrná složka
 a_k, b_k ...koeficienty Fourierovy řady
 k ...pořadí harmonické složky

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(k\omega_0 t) dt \quad a_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(k\omega_0 t) dt$$

Fourierovy řady

- *Spektrální (polární) tvar Fourierových řad*

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sin(k\omega_0 t + \varphi_k)$$

c_k

... amplituda k -té spektrální složky

φ_k

... fáze k -té spektrální složky

$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad \varphi_k = \arctan \frac{a_k}{b_k}$$

Fourierovy řady

- **Komplexní (exponenciální) tvar Fourierových řad**

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t}$$

X_k ... komplexní koeficient

$$X_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k)$$

$$c_k = 2|X_k|$$

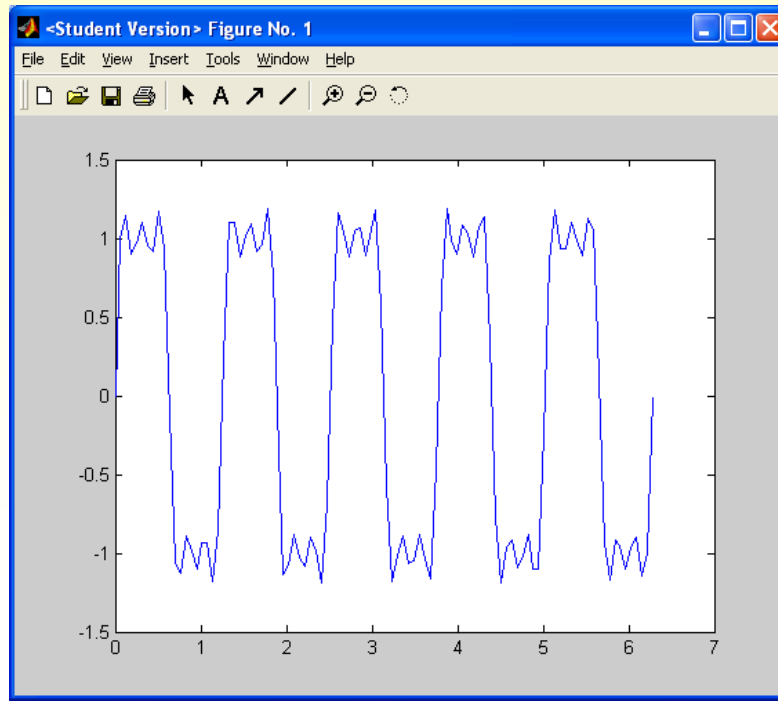
Fourierovy řady

- *Obdélníkový průběh*

Fourierovy řady

- *Obdélníkový průběh*

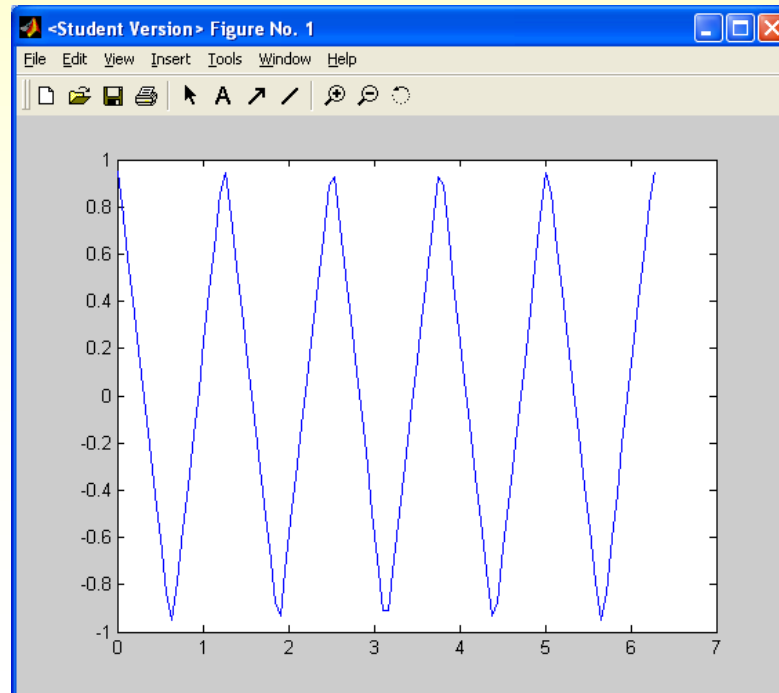
$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n \pi t = \frac{4}{\pi} \left[\sin \pi t + \frac{1}{3} \sin 3 \pi t + \frac{1}{5} \sin 5 \pi t + \dots \right]$$



Fourierovy řady

- *Trojúhelníkový průběh*

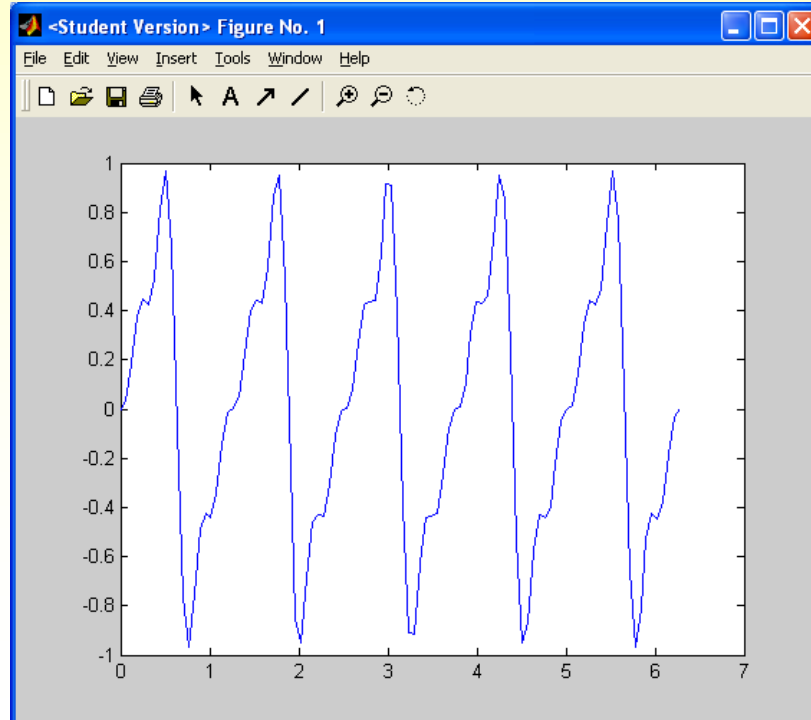
$$f(t) = \frac{8}{\pi^2} (\cos(\omega t) + \frac{1}{9} \cos(3\omega t) + \frac{1}{25} \cos(5\omega t) + \frac{1}{49} \cos(7\omega t) + \dots)$$



Fourierovy řady

- *Pilový průběh*

$$f(t) = \frac{2}{\pi} (\sin(\omega t) - \frac{1}{2} \sin(2\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) - \frac{1}{4} \sin(4\omega t) + \dots)$$



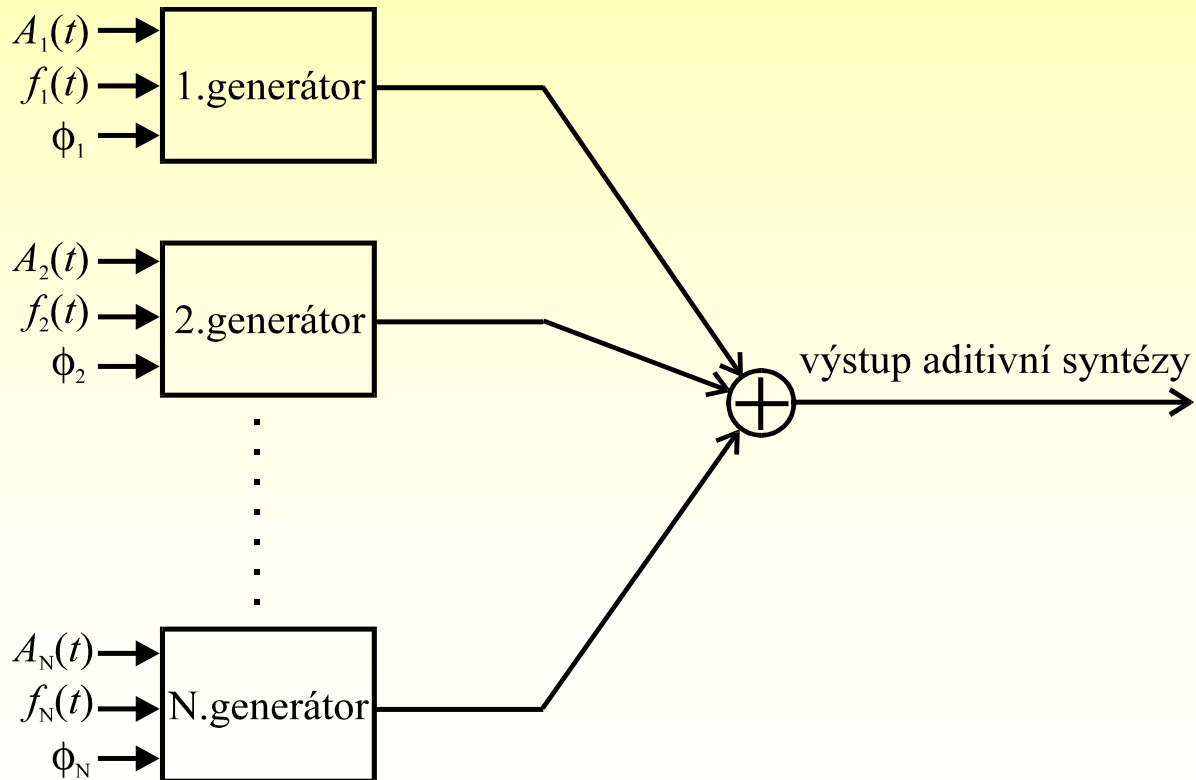
Harmonická analýza v MATLABu

```
function analyza(soubor)
% funkce analyza(soubor) vykresli amplitudove
% spektrum *.wav souboru.
[signal,fs] = wavread(soubor);

N = length(signal);
c = fft(signal)/N;
A = 2*abs(c(2:floor(N/2)));
f = (1:floor(N/2)-1)*fs/N;
plot(f,A,'r')
```

Aditivní syntéza I

- Spektrální tvar Fourierovy řady

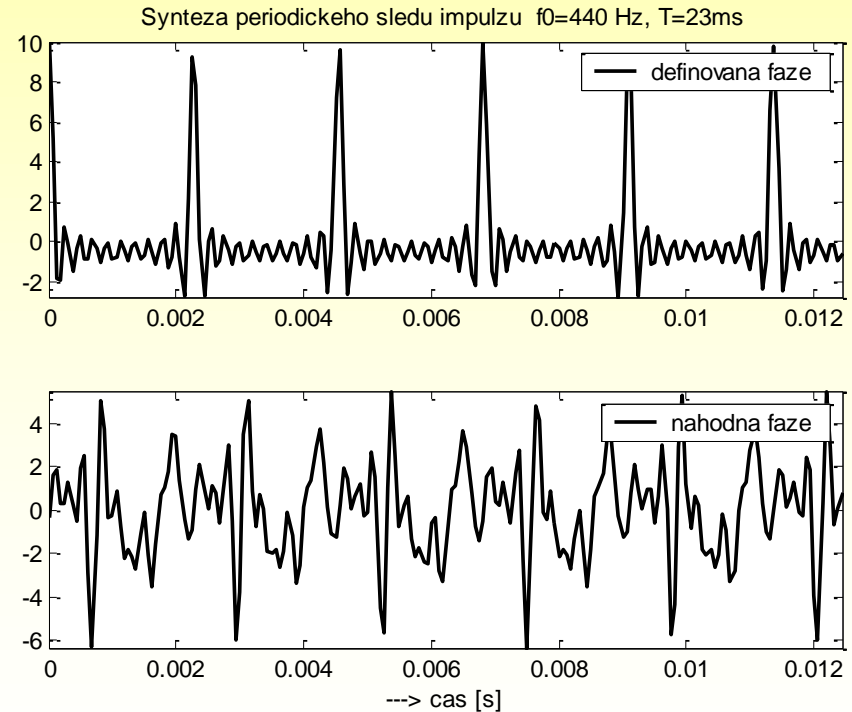


Aditivní syntéza II

- Periodický sled impulsů

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos(k\omega_0 t)$$

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos(k\omega_0 t + 2\pi \cdot \text{rand}(k))$$



Aditivní syntéza III

- Periodický sled impulsů

```
f=440; fs=16000; doba=.5; t=0:1/fs:doba;
```

```
zvuk_1a(1,:)=cos(2*pi*f*t);
```

```
zvuk_1b(1,:)=cos(2*pi*f*t+2*pi*rand);
```

```
for k=2:10
```

```
    zvuk_1a(k,:)=cos(k*2*pi*f*t);
```

```
    zvuk_1b(k,:)=cos(k*2*pi*f*t+2*pi*rand);
```

```
    subplot(211), plot(t(1:200),sum(zvuk_1a(:,1:200))),
```

```
    subplot(212), plot(t(1:200),sum(zvuk_1b(:,1:200))),
```

```
    soundsc(sum(zvuk_1a),fs), pause(1.5*doba)
```

```
    soundsc(sum(zvuk_1b),fs), pause(1.5*doba)
```

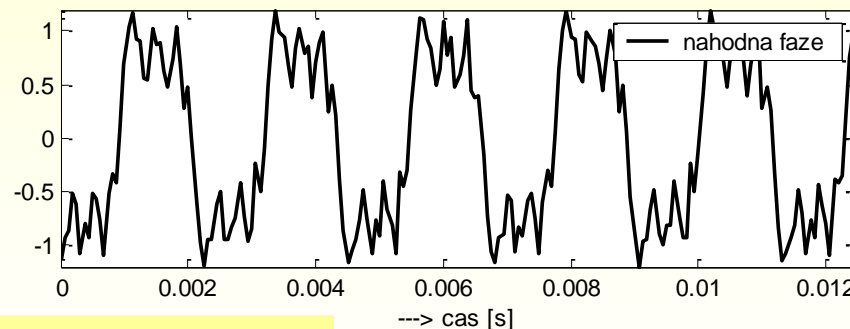
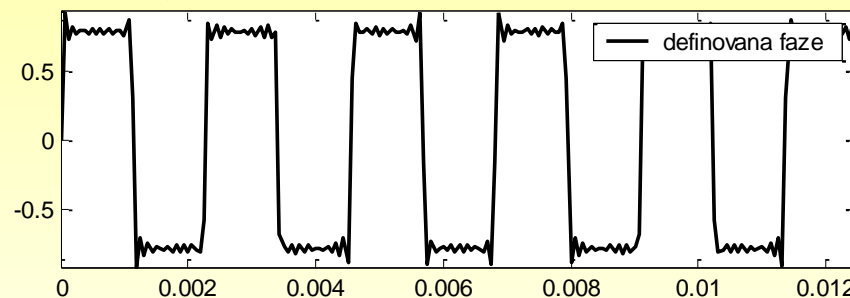
```
end;
```

Aditivní syntéza IV

- Obdélníkový průběh

$$x(t) = \frac{1}{2k+1} \sum_{k=0}^{\infty} \sin((2k+1)\omega_0 t)$$

Syntéza periodického obdel. prubehu f0=440 Hz, T=23ms



$$x(t) = \frac{1}{2k+1} \sum_{k=0}^{\infty} \sin((2k+1)\omega_0 t + 2\pi \cdot \text{rand}(k))$$

Aditivní syntéza V

- Obdélníkový průběh

```
zvuk_2a(1,:)=sin(2*pi*f*t);
```

```
zvuk_2b(1,:)=sin(2*pi*f*t+2*pi*rand);
```

```
for k=3:2:18
```

```
    zvuk_2a(k,:)=(1/k)*sin(k*2*pi*f*t);
```

```
    zvuk_2b(k,:)=(1/k)*sin(k*2*pi*f*t+2*pi*rand);
```

```
    subplot(211), plot(t(1:200),sum(zvuk_2a(:,1:200)))
```

```
    subplot(212), plot(t(1:200),sum(zvuk_2b(:,1:200)))
```

```
    soundsc(sum(zvuk_2a),fs),pause(1.2*doba)
```

```
    soundsc(sum(zvuk_2b),fs),pause(1.2*doba)
```

```
end;
```

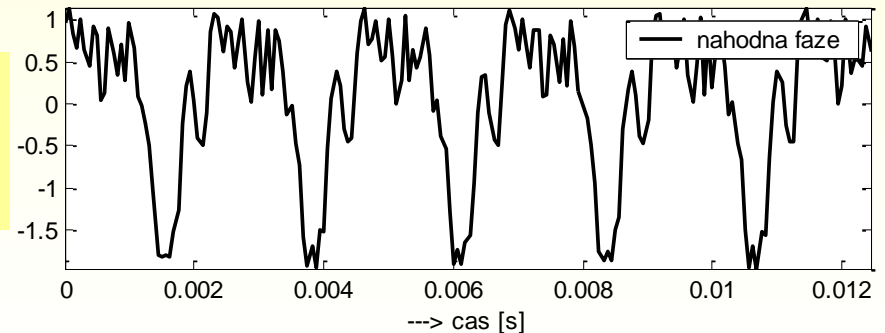
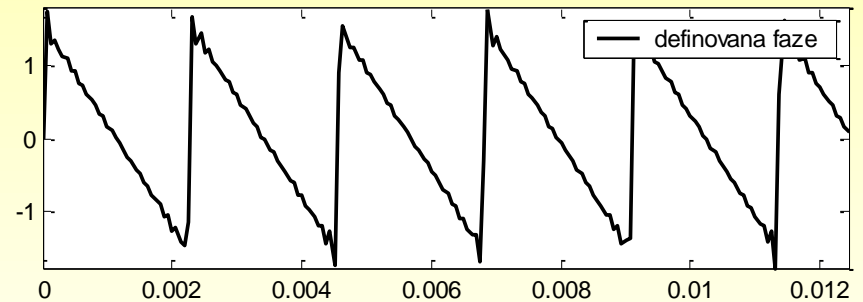
Aditivní syntéza VI

- Pilový průběh

$$x(t) = \frac{1}{k} \sum_{k=1}^{\infty} \sin(k\omega_0 t)$$

$$x(t) = \frac{1}{k} \sum_{k=1}^{\infty} \sin(k\omega_0 t + 2\pi \cdot \text{rand}(k))$$

Syntéza periodického pilového průběhu $f_0=440$ Hz, $T=23$ ms



Aditivní syntéza VII

- Pilový průběh

```
zvuk_3a(1,:)=sin(2*pi*f*t);
```

```
zvuk_3b(1,:)=sin(2*pi*f*t+2*pi*rand);
```

```
for k=2:18
```

```
    zvuk_3a(k,:)=(1/k)*sin(k*2*pi*f*t);
```

```
    zvuk_3b(k,:)=(1/k)*sin(k*2*pi*f*t+2*pi*rand);
```

```
    subplot(211), plot(t(1:200),sum(zvuk_3a(:,1:200)))
```

```
    subplot(212), plot(t(1:200),sum(zvuk_3b(:,1:200))),
```

```
    soundsc(sum(zvuk_3a),fs),pause(1.2*doba)
```

```
    soundsc(sum(zvuk_3b),fs),,pause(1.2*doba)
```

```
end;
```

Hudební nástroje

- **barva zvuku = obsah spektrálních složek**

Hudební nástroje

- barva zvuku = obsah spektrálních složek

– **jasné zvuky** - zdůrazněné sudé harmonické

$$x(t) = 0,2 \sin(\omega_0 t) + 0,6 \sin(2 \cdot \omega_0 t) + 0,4 \sin(3 \cdot \omega_0 t) + \\ + 0,6 \sin(4 \cdot \omega_0 t) + 0,4 \sin(5 \cdot \omega_0 t)$$



Hudební nástroje

- barva zvuku = obsah spektrálních složek

– housle - pila

– jasné zvuky - zdůrazněné sudé harmonické

$$x(t) = 0,2 \sin(\omega_0 t) + 0,6 \sin(2 \cdot \omega_0 t) + 0,4 \sin(3 \cdot \omega_0 t) + \\ + 0,6 \sin(4 \cdot \omega_0 t) + 0,4 \sin(5 \cdot \omega_0 t)$$



– duté zvuky - pouze liché harmonické

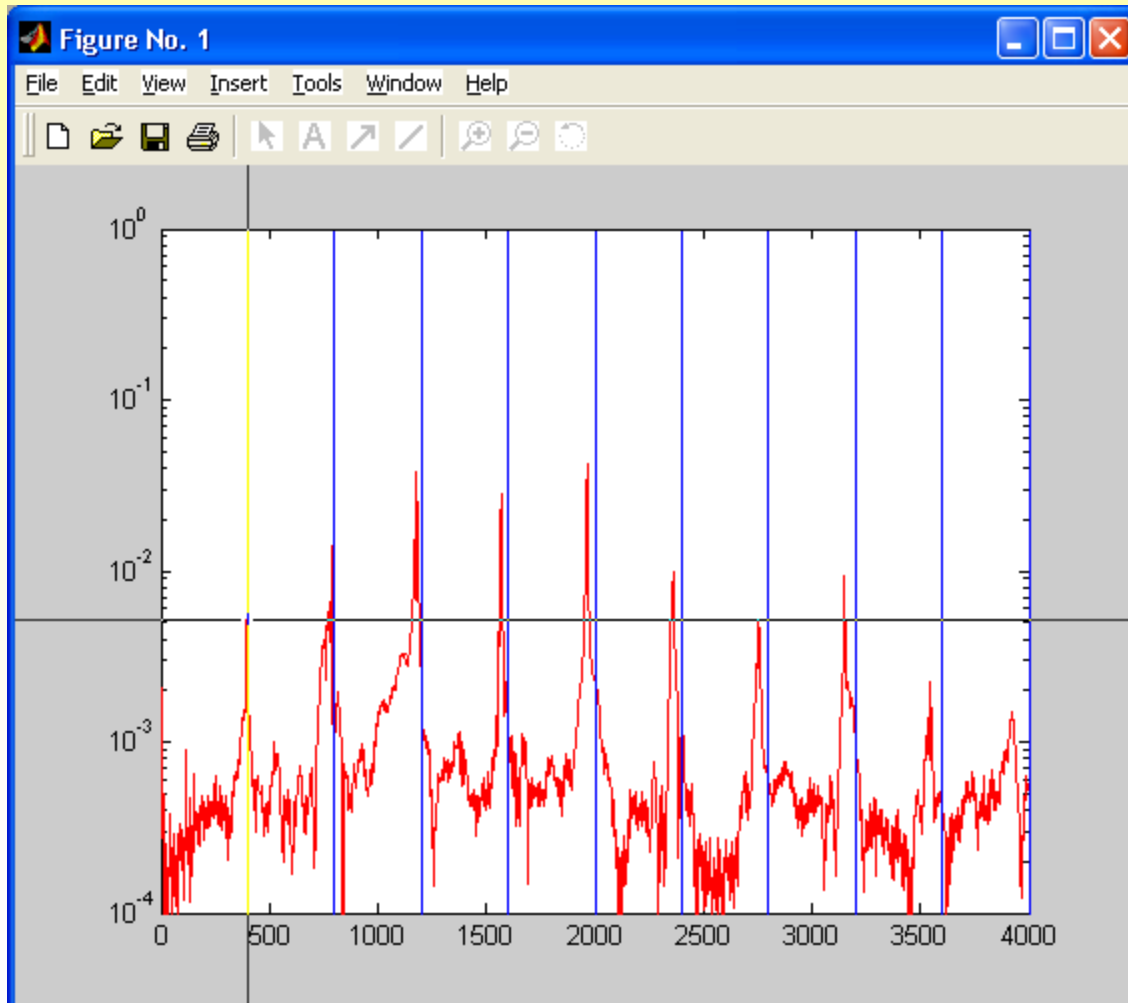
$$x(t) = 0,8 \sin(\omega_0 t) + 0,4 \sin(3 \cdot \omega_0 t) + 0,2 \sin(5 \cdot \omega_0 t)$$



Harmonická analýza v MATLABu

```
>> analyza('banjo')
```

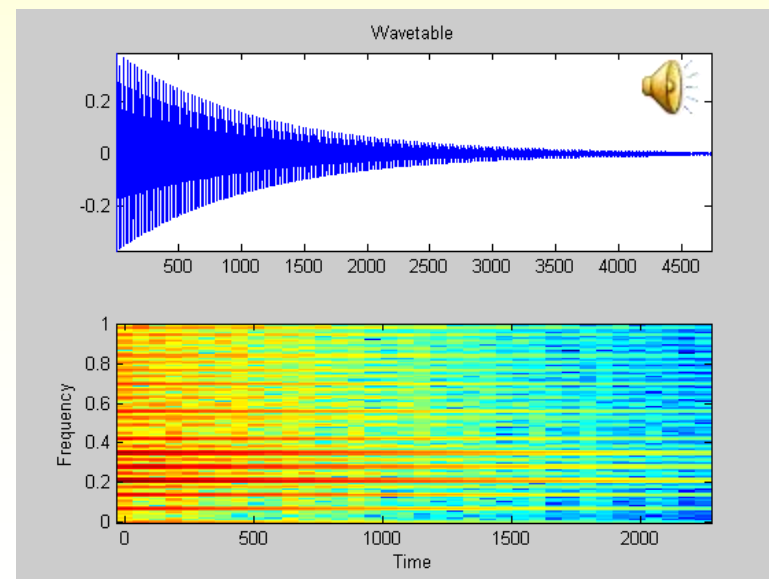
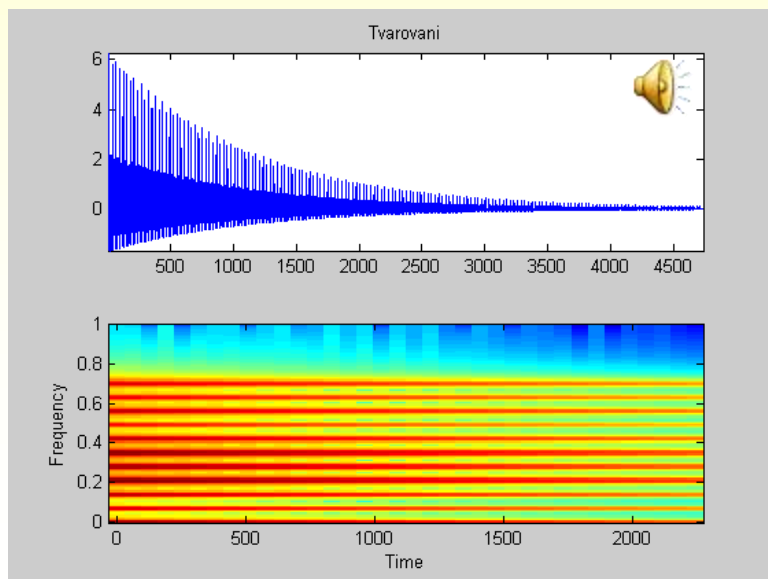
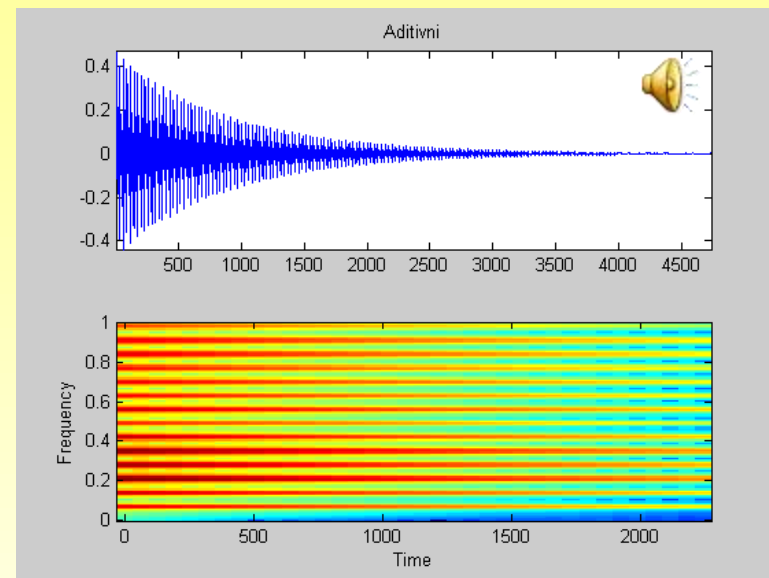
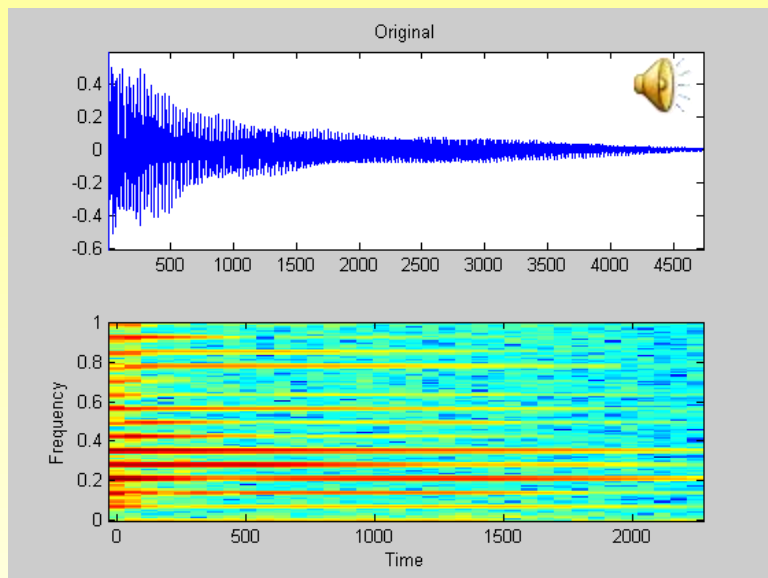
```
>> [X,Y]=ginput(10)
```



Implementace aditivní syntézy v MATLABu

```
% BANJO
% %%%%%%%%%%
fs      = 16000;
doba    = .5;
tau     = .1;
f0      = 400;
nT      = 0:1/fs:doba-1/fs;
ampl    = [0.0051 0.0144 0.0246 0.0290 0.0422 ...
           0.0101 0.0052 0.0096 0.0022 0.0015];
o=exp(-nT./tau);
x=o.*[ampl*sin(2*pi*[1:length(ampl)]'*f0*nT)];
soundsc(x,fs)
plot(nT,x), title('banjo'),
axis tight, xlabel('---> cas [s]')
```

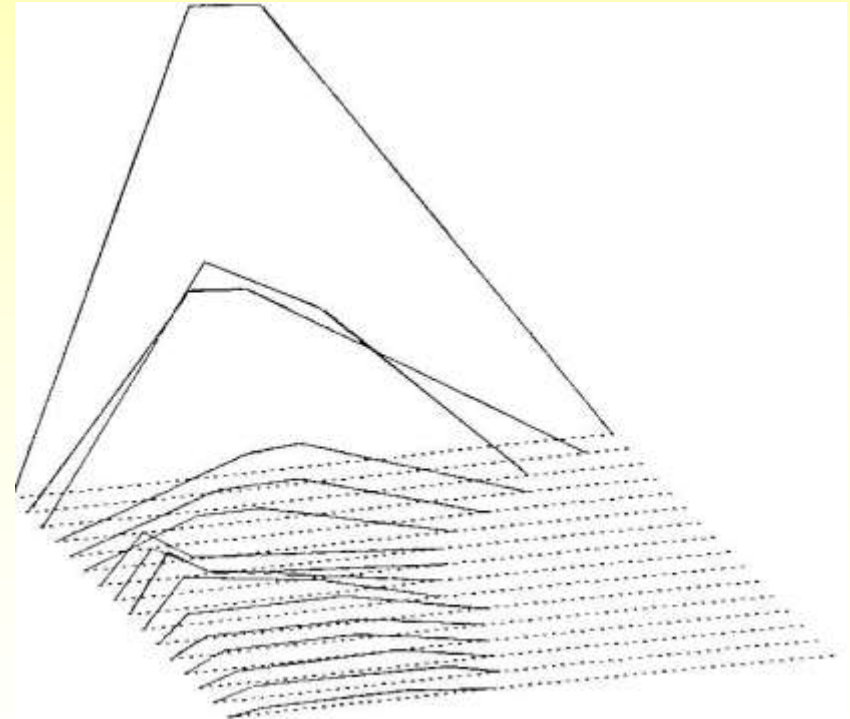
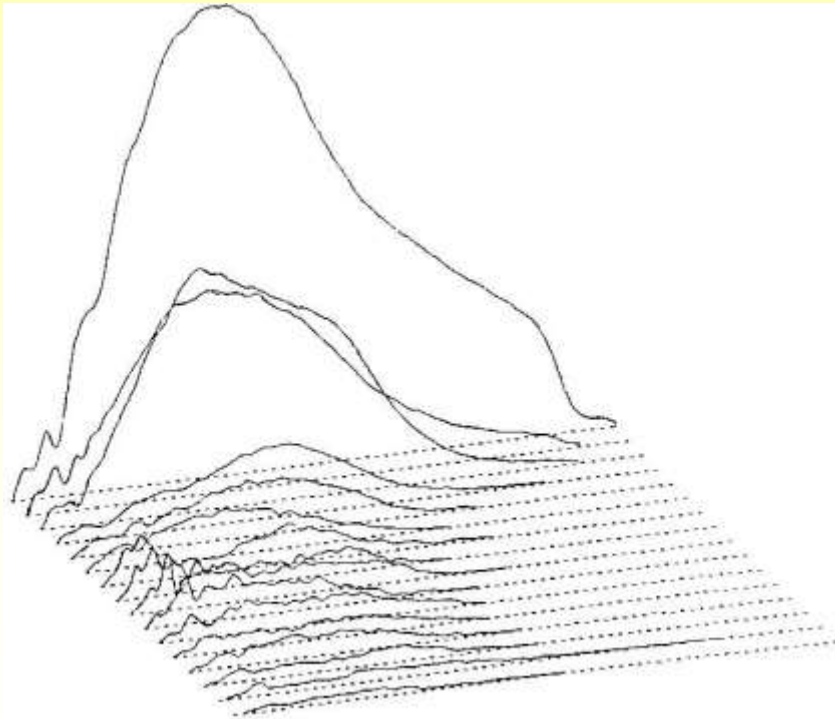
Aditivní syntéza



Časově proměnná aditivní syntéza parciál

Time Varying Partial Additive Synthesis (TVPAS)

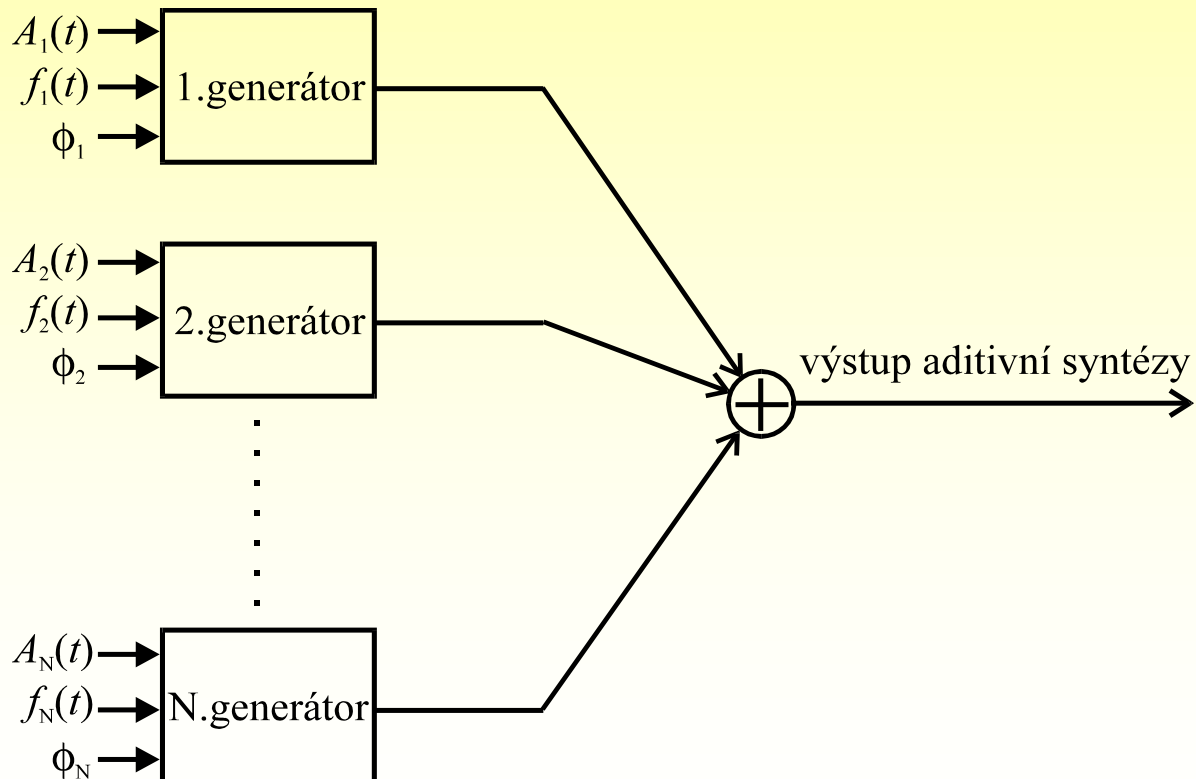
- přirozené zvuky jsou složeny z parciál
- **parciály** mají časově proměnné frekvence i časově proměnné amplitudy
- Řídící informace
 - Amplitudové obálky
 - Frekvenční trajektorie



$$f(t) = \sum_{n=1}^p A_n(t) \cdot \cos(\omega_n(t) \cdot t - \phi_n(t))$$

Aditivní syntéza I

- Spektrální tvar Fourierovy řady



Aditivní syntéza

- **Barva zvuku**
- **attack je pro určení barvy důležitější než sustain**

Aditivní syntéza

- **Barva zvuku**
 - **attack je pro určení barvy důležitější než sustain**
 - **vyšší harmonické (parciály) vstupují později a končí dříve**

Aditivní syntéza

- **Barva zvuku**
 - **attack je pro určení barvy důležitější než sustain**
 - **vyšší harmonické (parciály) vstupují později a končí dříve**
 - **hraje-li nástroj hlasitěji, používá se více harmonických (parciál)**

Aditivní syntéza

- **Nevýhodu představuje velké množství dat (řídící funkce parametrů) a velké množství oscilátorů**

Aditivní syntéza

- **Nevýhodu představuje velké množství dat (řídící funkce parametrů) a velké množství oscilátorů**
- **Hlavní význam aditivní syntézy dnes je v resyntéze (vytváření různých zvuků podle spektrogramu)**

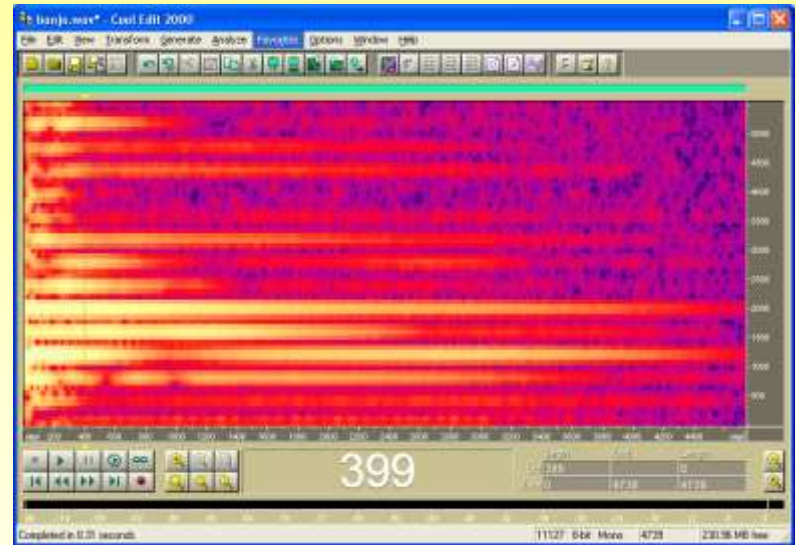
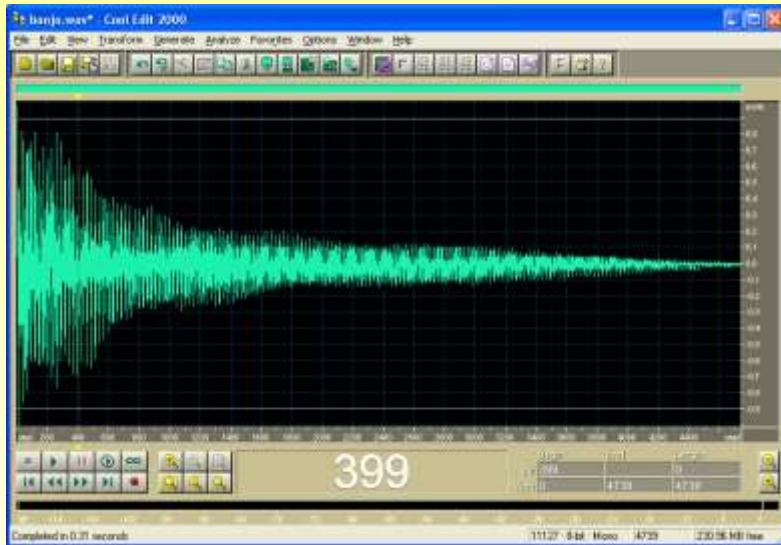
Aditivní syntéza

- **Při spektrálním se aditivní syntéza doplňuje vhodnými šumovými složkami**

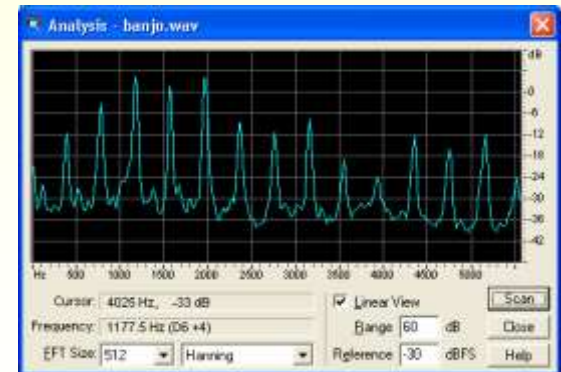
Aditivní syntéza

- **Při spektrálním se aditivní syntéza doplňuje vhodnými šumovými složkami**
- **Pro vytvoření neharmonických průběhů, např. které dávají „kovový“ zvuk, se používají techniky, při nichž se sčítají harmonické průběhy (dva i více), které jsou vůči sobě relativně rozladěny (frekvenční složky nejsou celistvým násobkem základní frekvence).**

Harmonická analýza programem Cool Edit



```
>> dB = [-60 -30 0 -10];  
>> f = [100 200 500 1000];  
% prevod dB do linearniho mer.  
>> amp=10.^(dB./20)  
>> dB =20.*log10(amp)
```



Zvonek I

```
clear
fs =44100;           % vzorkovaci frekvence
T1 =0.06;           % doba mezi uderu
T2 =0.480;          % delka posledniho uderu
f01=180;            % zakladni frekvence 1.zvonku
f02=181;            % zakladni frekvence 2.zvonku
A=[.01 .1  1  1];   % amplitudy ctyr oscilatoru
K=[ 5 10 20 40];    % nasobky zakl.frekvence
                    % jednotlivych oscilatoru
M=2;                % pocet serii zvoneni
N=4;                % celkovy pocet uderu = 2*N+1
```

Zvonek II

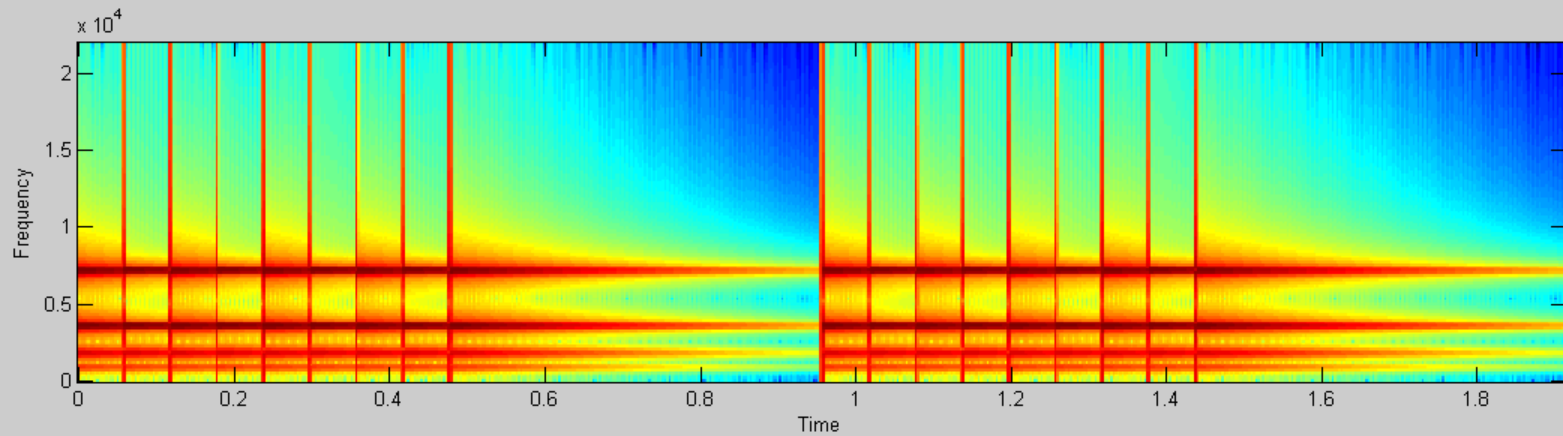
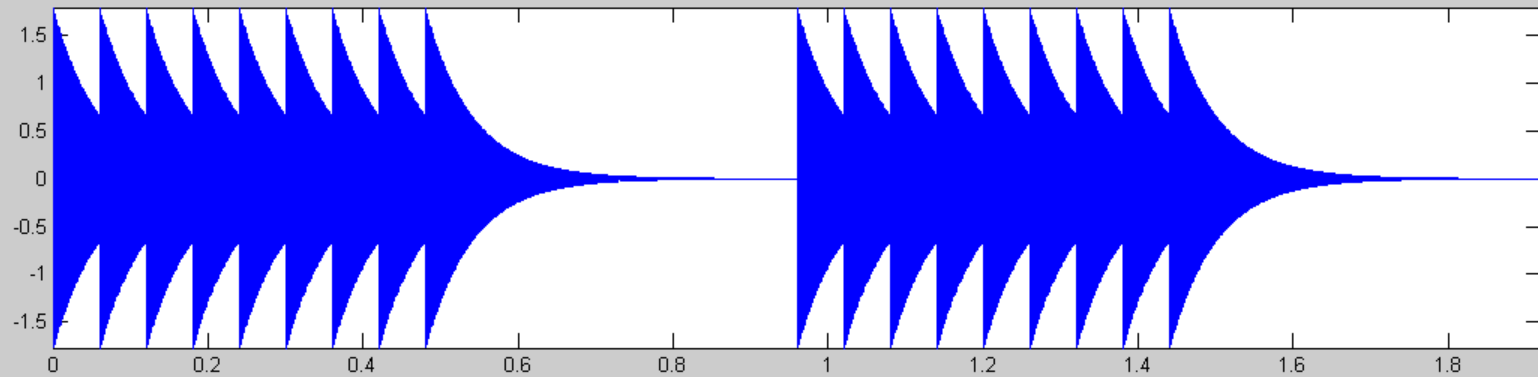
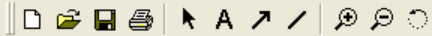
```
t=0:1/fs:T2-1/fs;  
x=[];  
for m=1:M  
    for n=1:N  
        x1=A*sin(2*pi*K'*(f01.*t)); % uder 1.zv.  
        x1=x1.*exp(-t/T1); % 1.zvonek s obalkou  
        x2=A*sin(2*pi*K'*(f02.*t)); % uder 2.zv.  
        x2=x2.*exp(-t/T1); % 2.zvonek s obalkou  
        x=[x x1(1:T1*fs) x2(1:T1*fs)];  
    end;  
x=[x x1]; % pripojeni posl.uderu prvniho zvonku  
end;
```

Zvonek



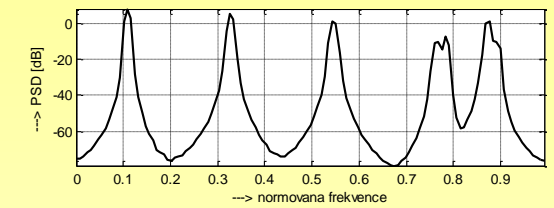
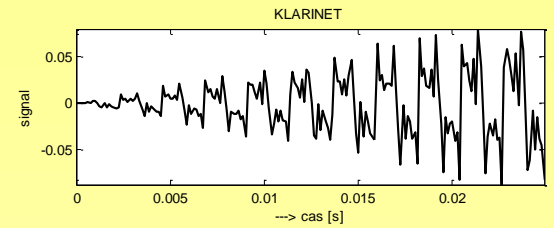
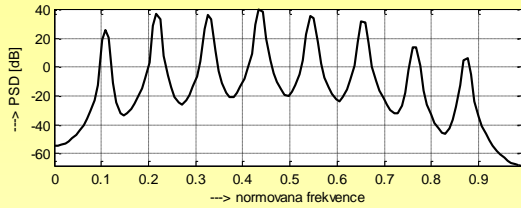
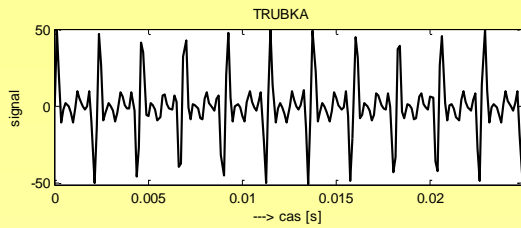
Figure No. 1

File Edit View Insert Tools Window Help

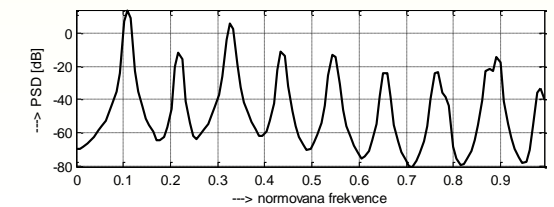
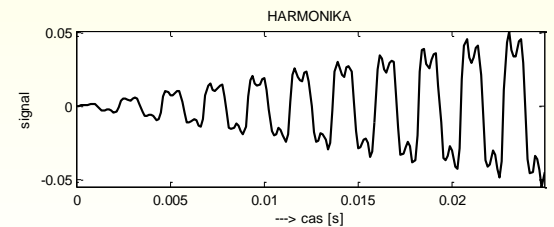
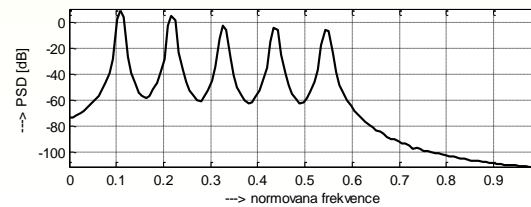
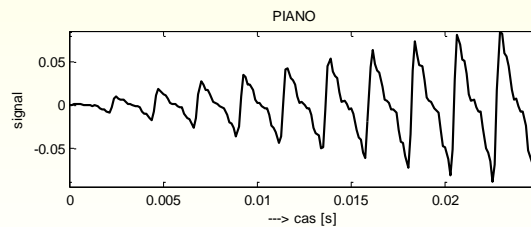
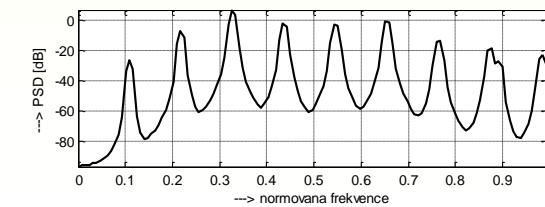
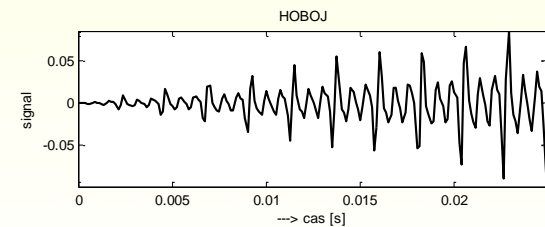
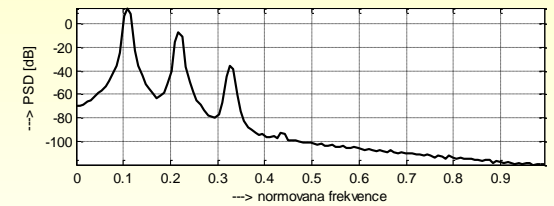
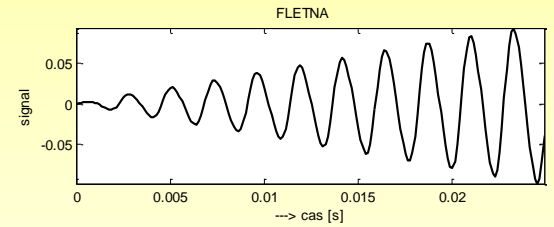


Syntézy ve cvičení

Náměty



Poř.harmonické	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.
Trubka	0,17	0,63	0,57	0,98	0,56	0,68	0,02	0,05	-	-	-
Harmonika	8,60	0,45	3,40	0,50	0,42	0,13	0,13	0,16	0,04	0,35	0,02
Flétna	2,54	0,25	0,01	-	-	-	-	-	-	-	-
Klarinet	1,00	0,00	0,75	0,00	0,50	0,00	0,14	0,50	0,00	0,12	0,17
Hoboj	0,02	0,20	1,00	0,37	0,36	0,46	0,10	0,06	0,03	0,02	-
Piano	0,32	0,20	0,08	0,07	0,06	-	-	-	-	-	-
Housle	0,39	0,30	0,17	0,01	0,11	-	-	-	-	-	-
Hlas	0,43	0,08	0,01	-	-	-	-	-	-	-	-



Aditivní syntéza samohlásek

- **Hemholtz 1877**
- $f_0 = 220$ Hz; doba = 3 s
- $ff=1$; $f = 0,7$; $mf = 0,3$; $p = 0,1$; $pp = 0,07$;



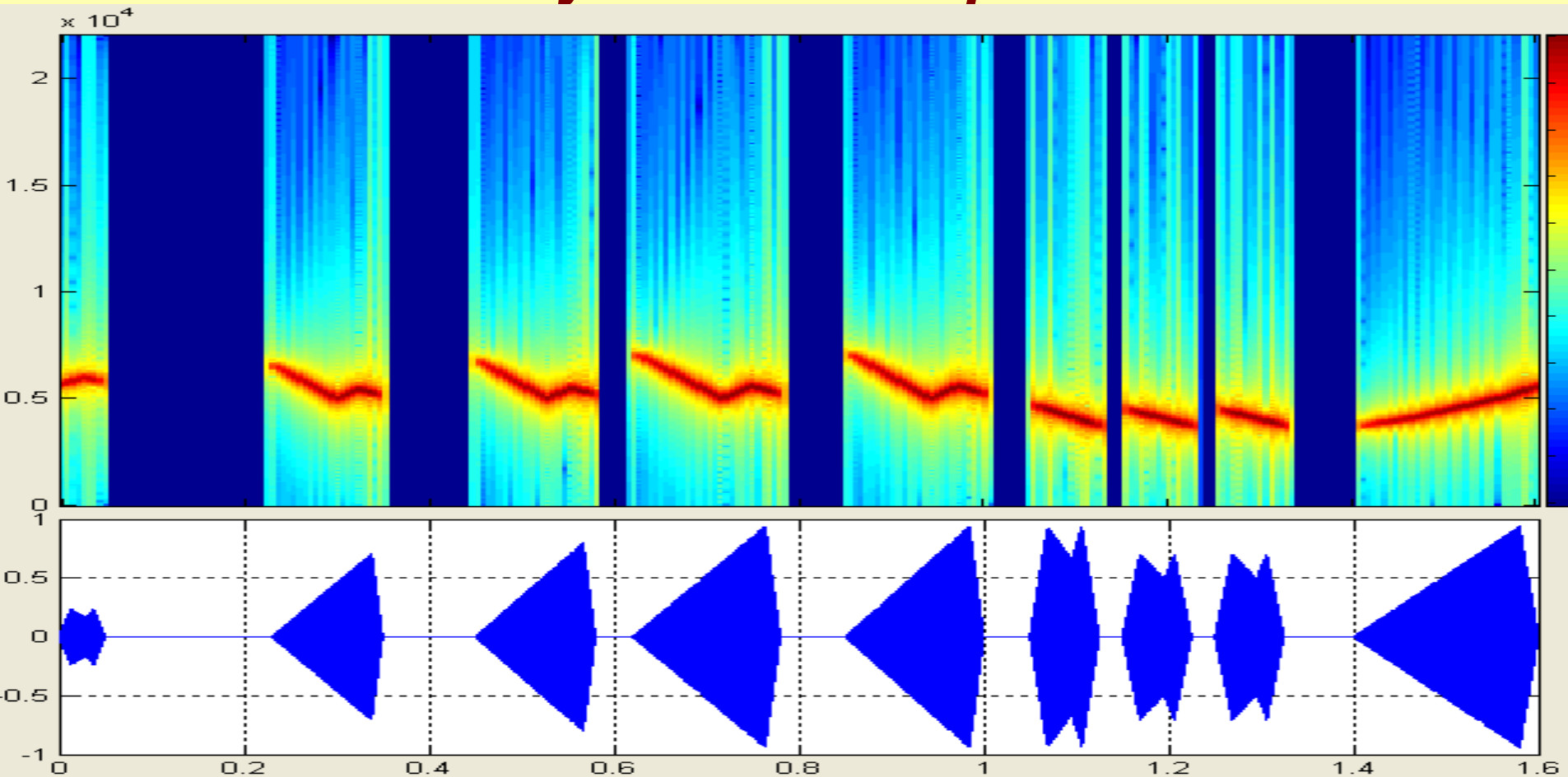
harm	1.	2.	3.	4.	5.	6.	8.	16.
U	ff	mf	pp	0	0	0	0	0
O	mf	f	mf	p	0	0	0	0
A	p	p	p	mf	mf	p	p	0
E	mf	0	mf	0	0	ff	0	0
I	mf	p	0	0	0	p	0	mf



Aditivní syntéza ptáků I

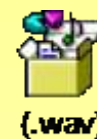


- *Lesňáček žlutý - Dendroica petechia*

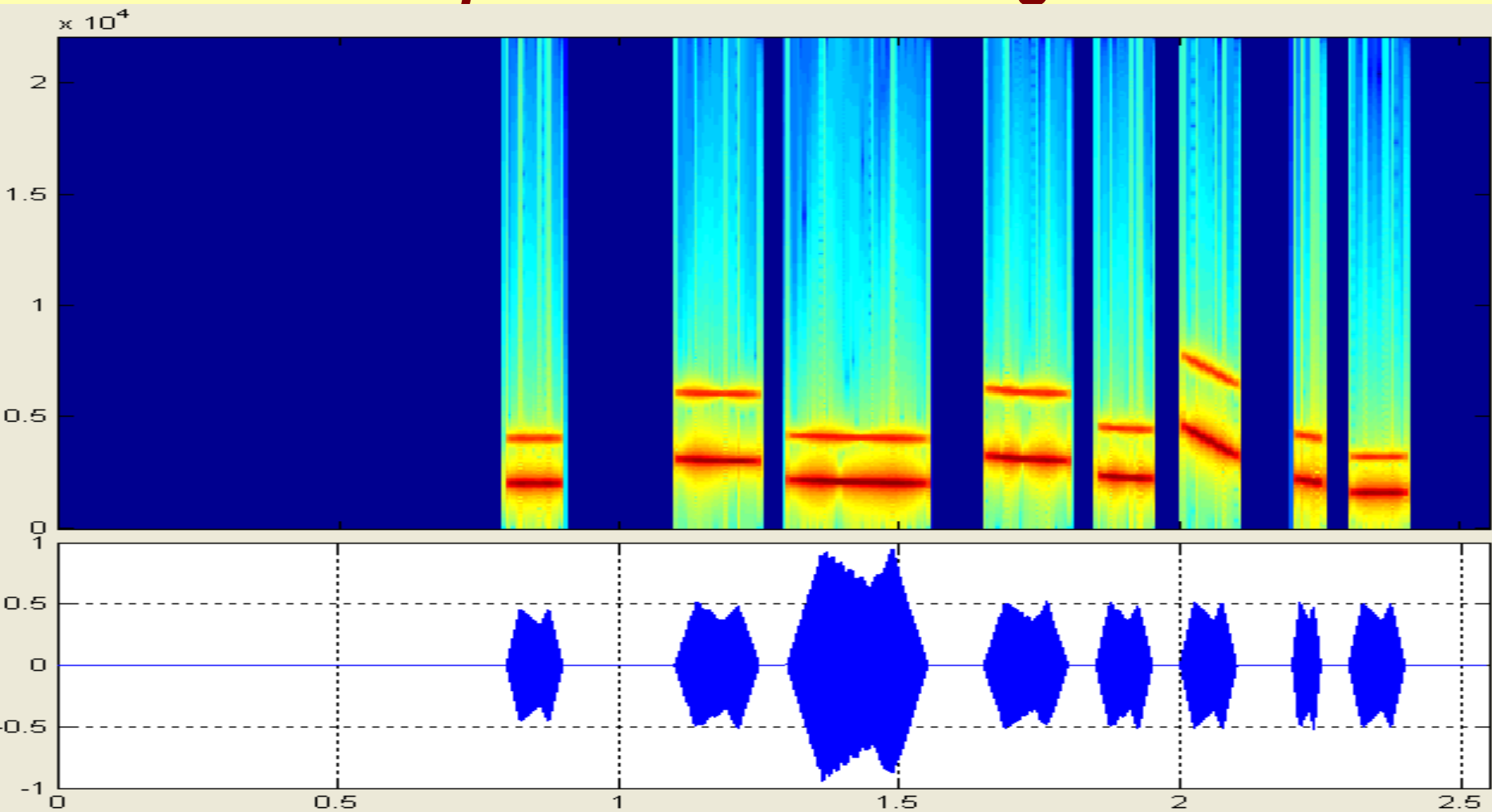




Aditivní syntéza ptáků II



- *Vlhovec západní - Sturnella neglecta*

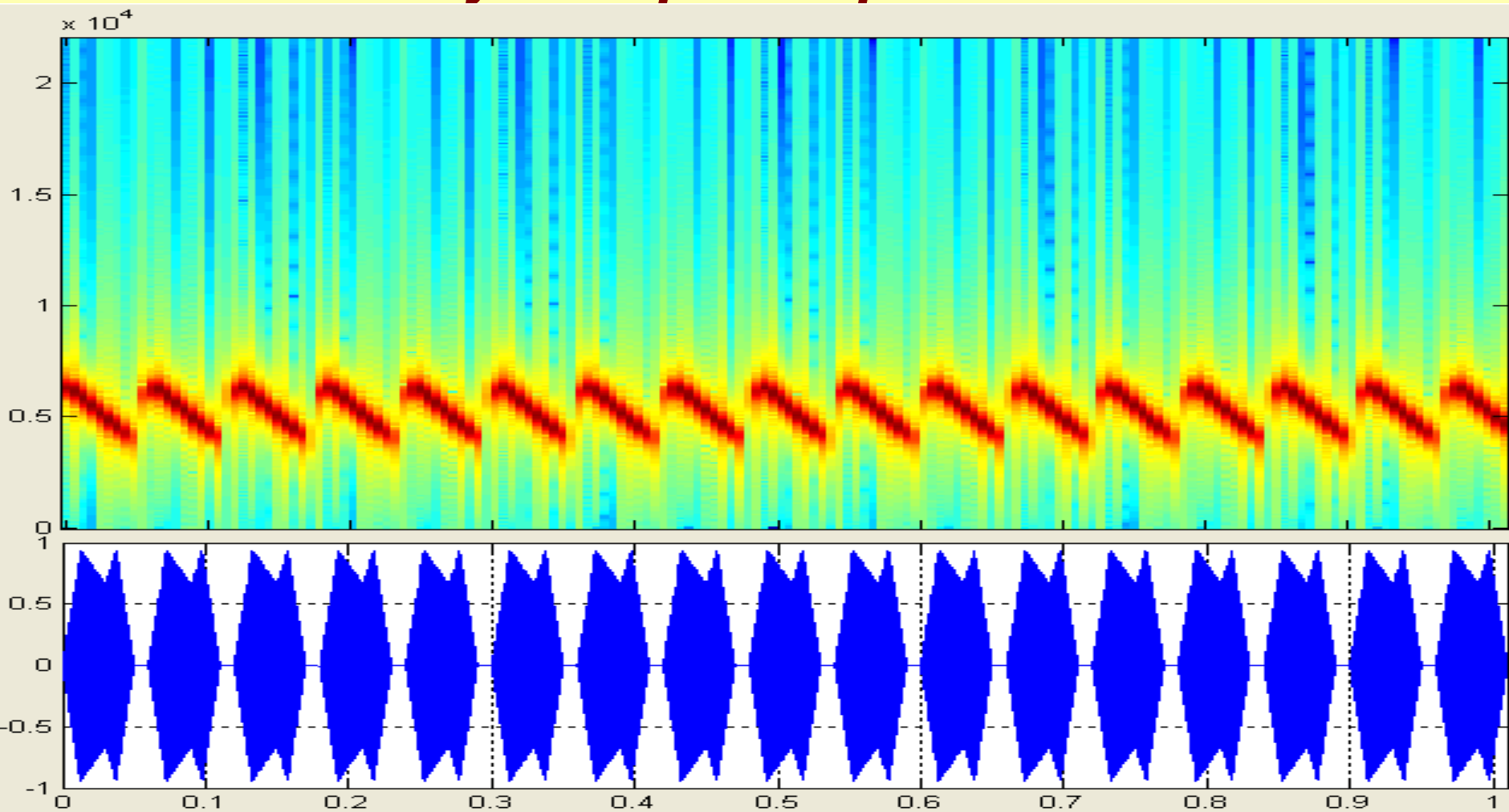




Aditivní syntéza ptáků III



- *Strnad kobylčí - Spizella passerina*

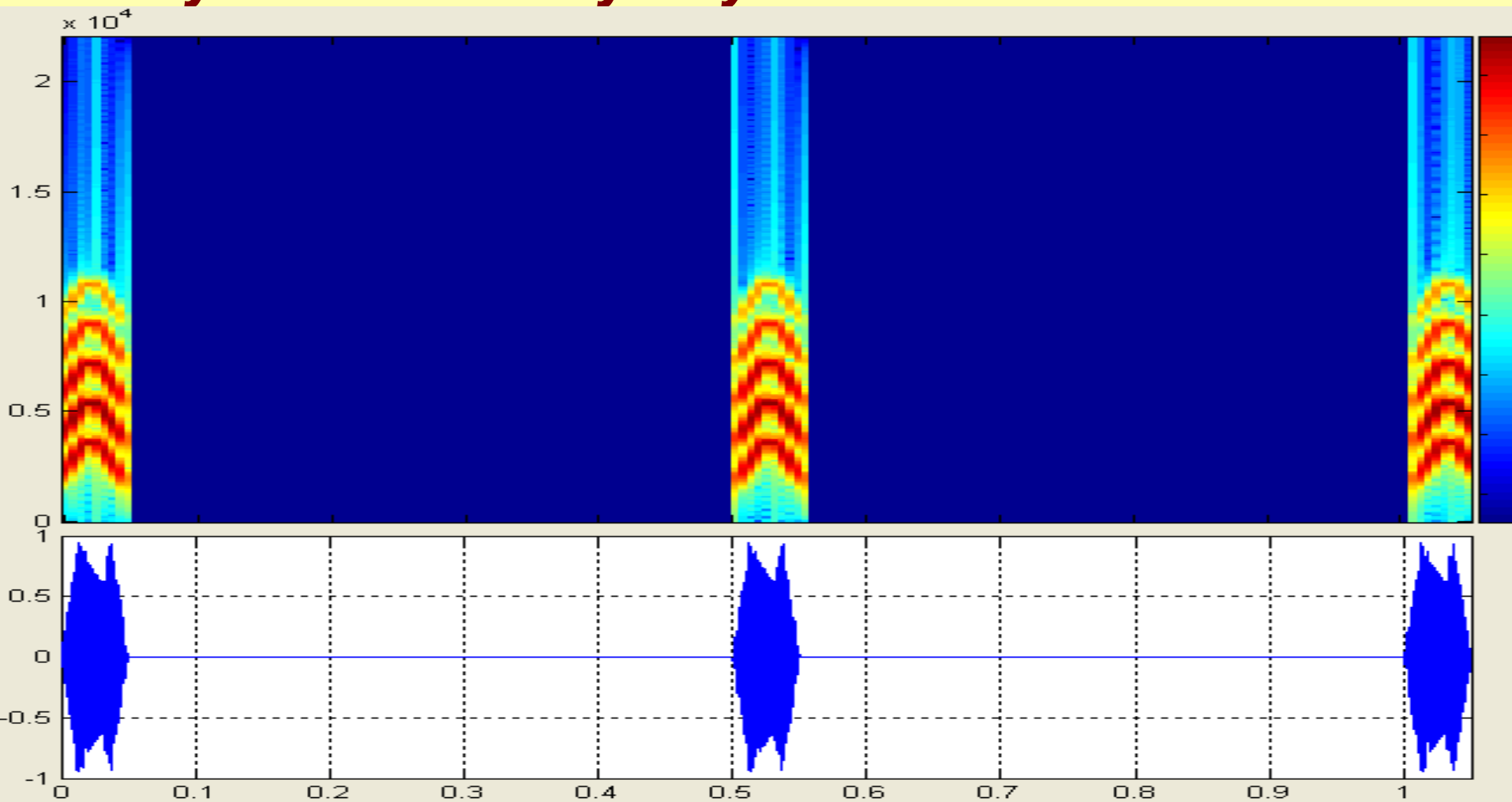




Aditivní syntéza ptáků IV



- *Tyran vidloocasý - Tyrannus forficatus*

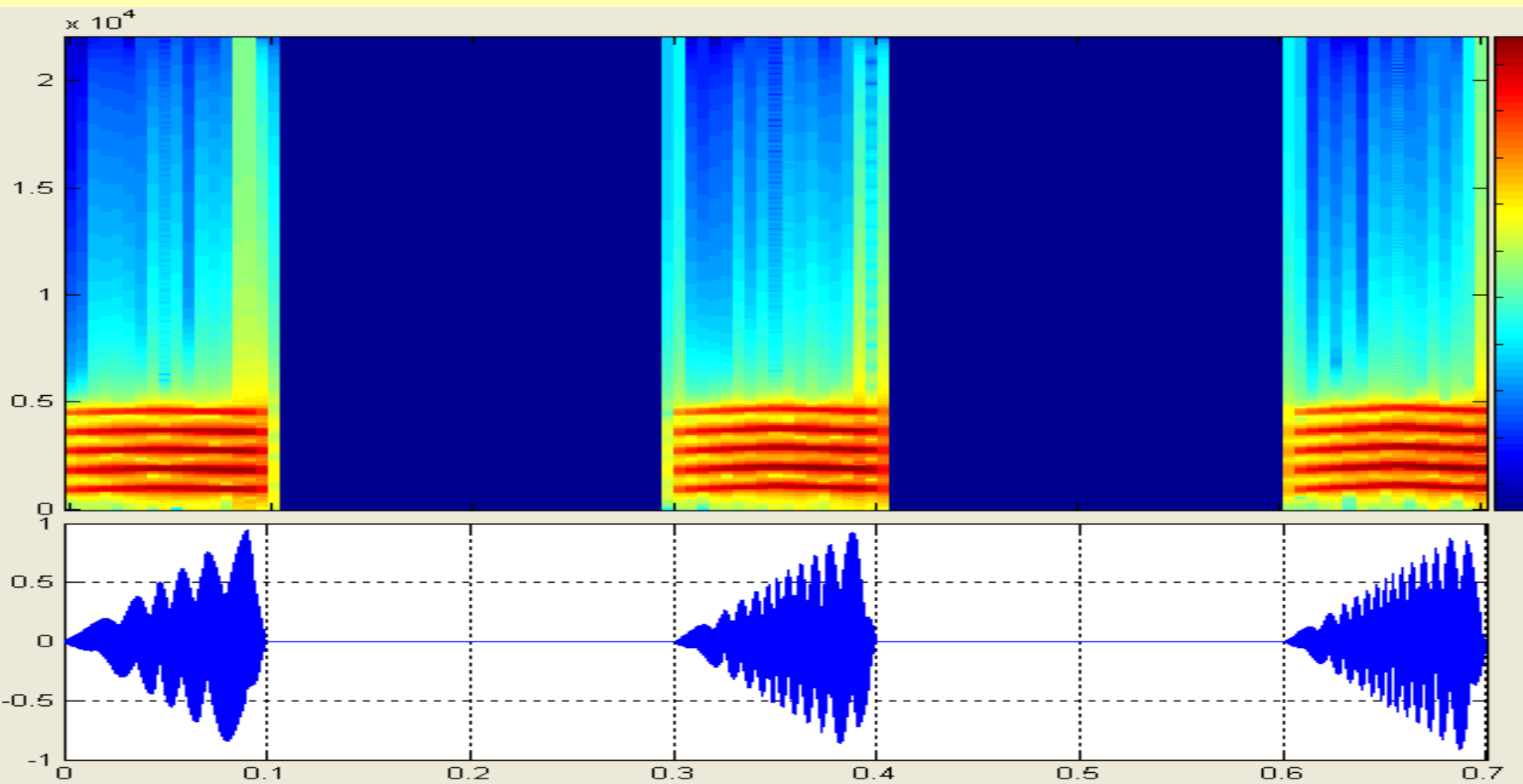




Aditivní syntéza ptáků V

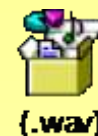


- Pisila karibská - Himantopus Mexicanus*

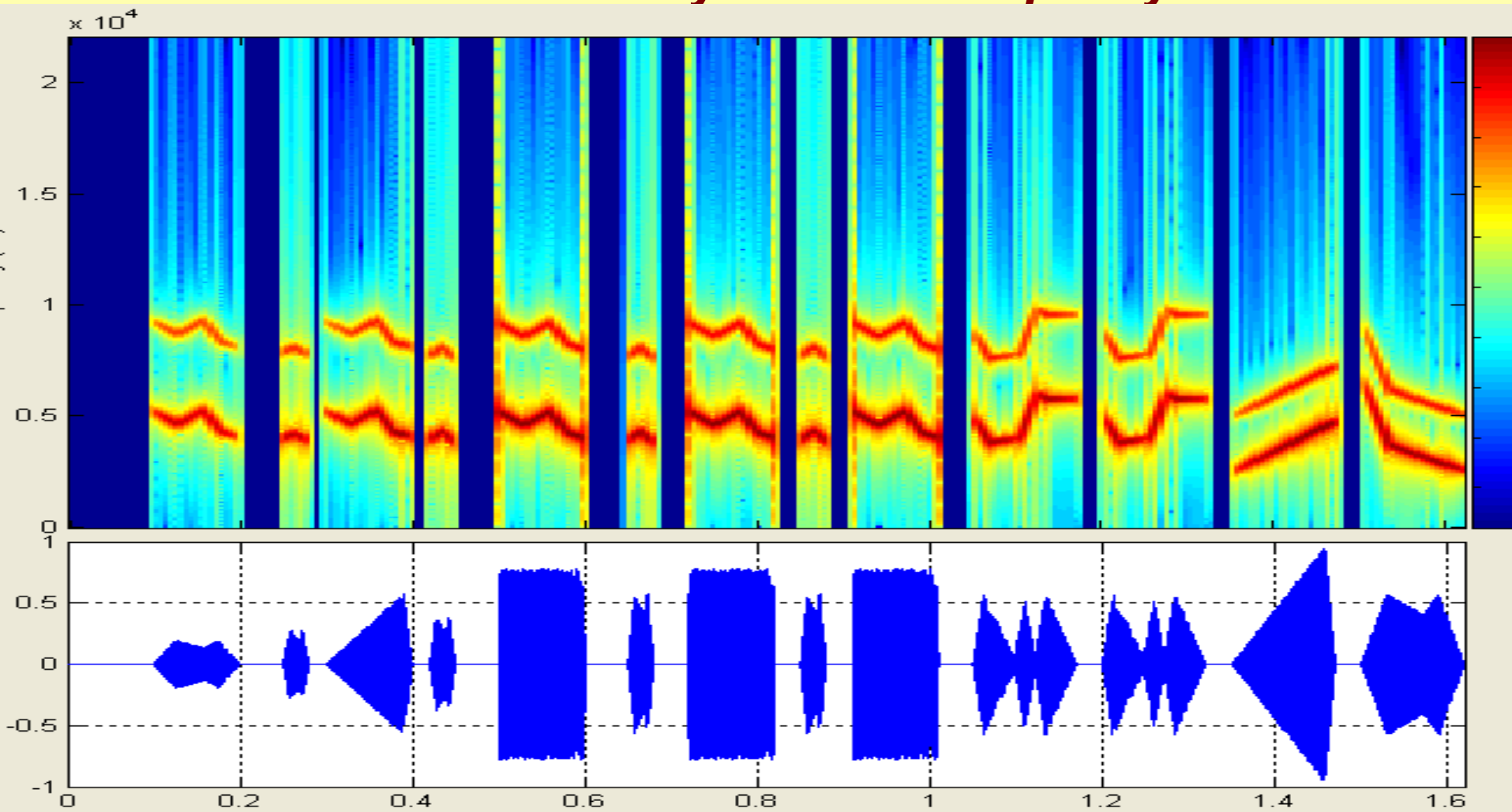




Aditivní syntéza ptáků VI



- *Lesňáček žlutotemenný - Dendroica pensylvanica*

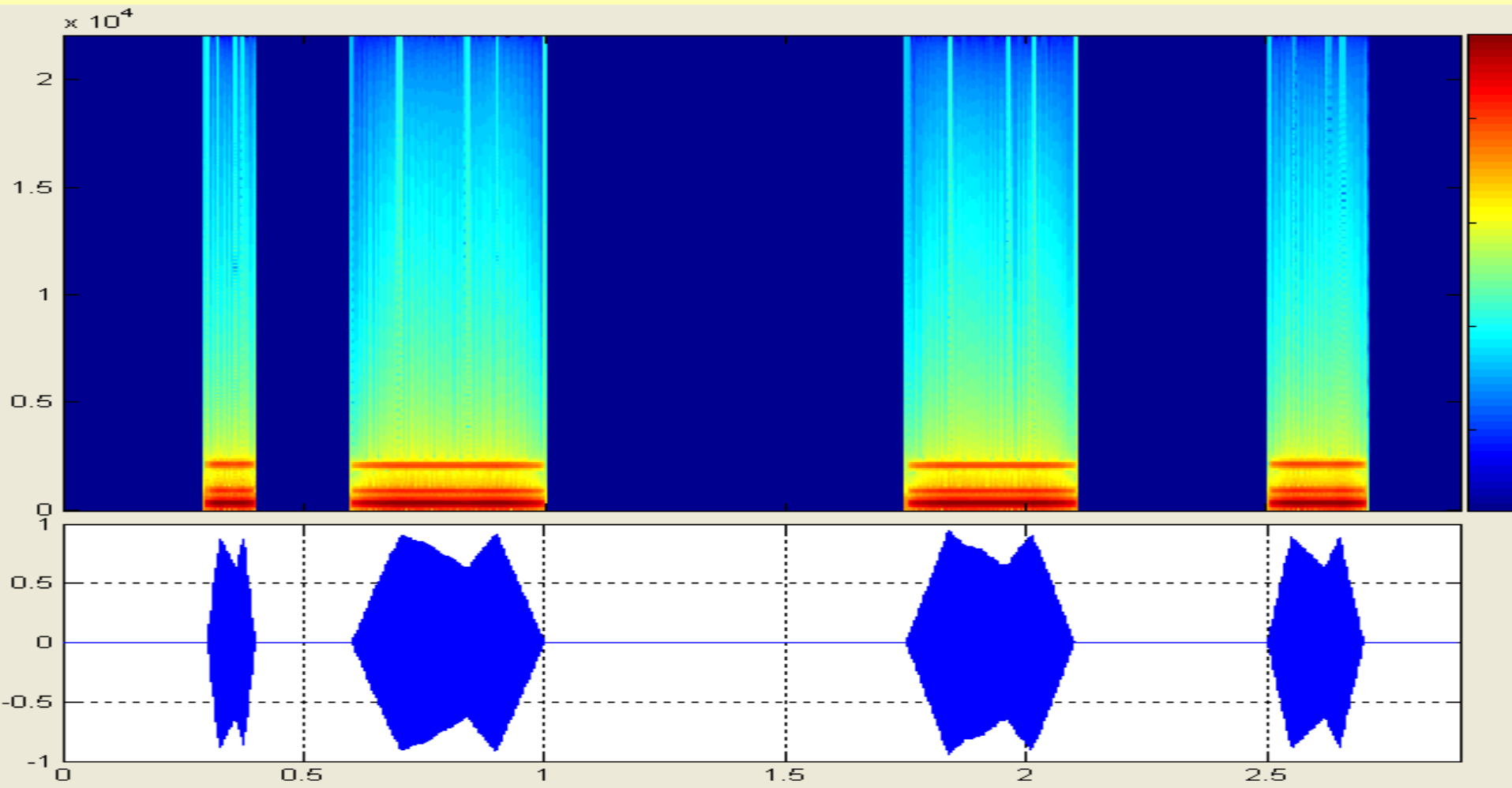




Aditivní syntéza ptáků VII



- *Výr virginický- Bubo virginianus*

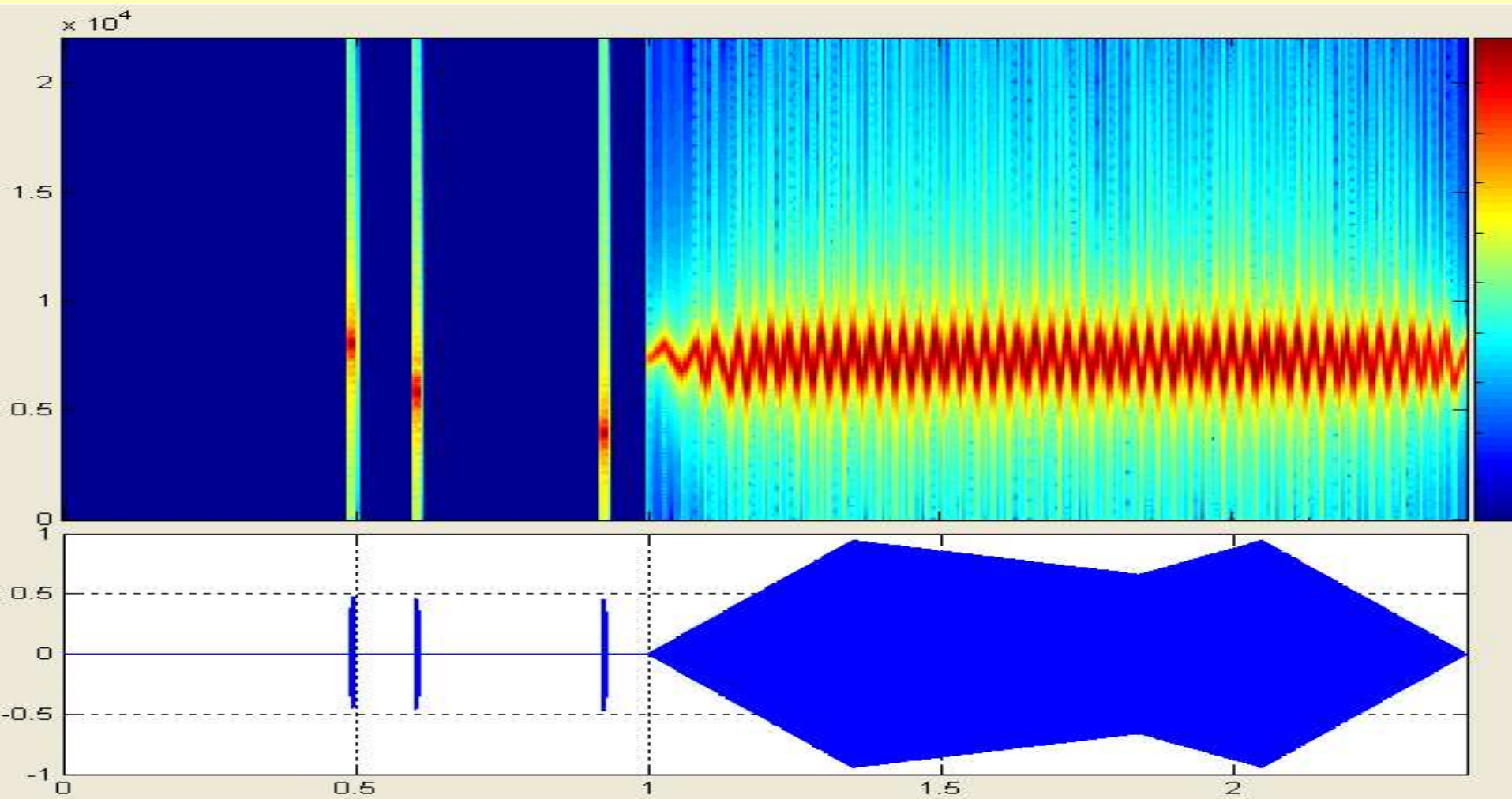




Aditivní syntéza ptáků VIII



- *Strnad pustinný - Ammodramus savannarum*

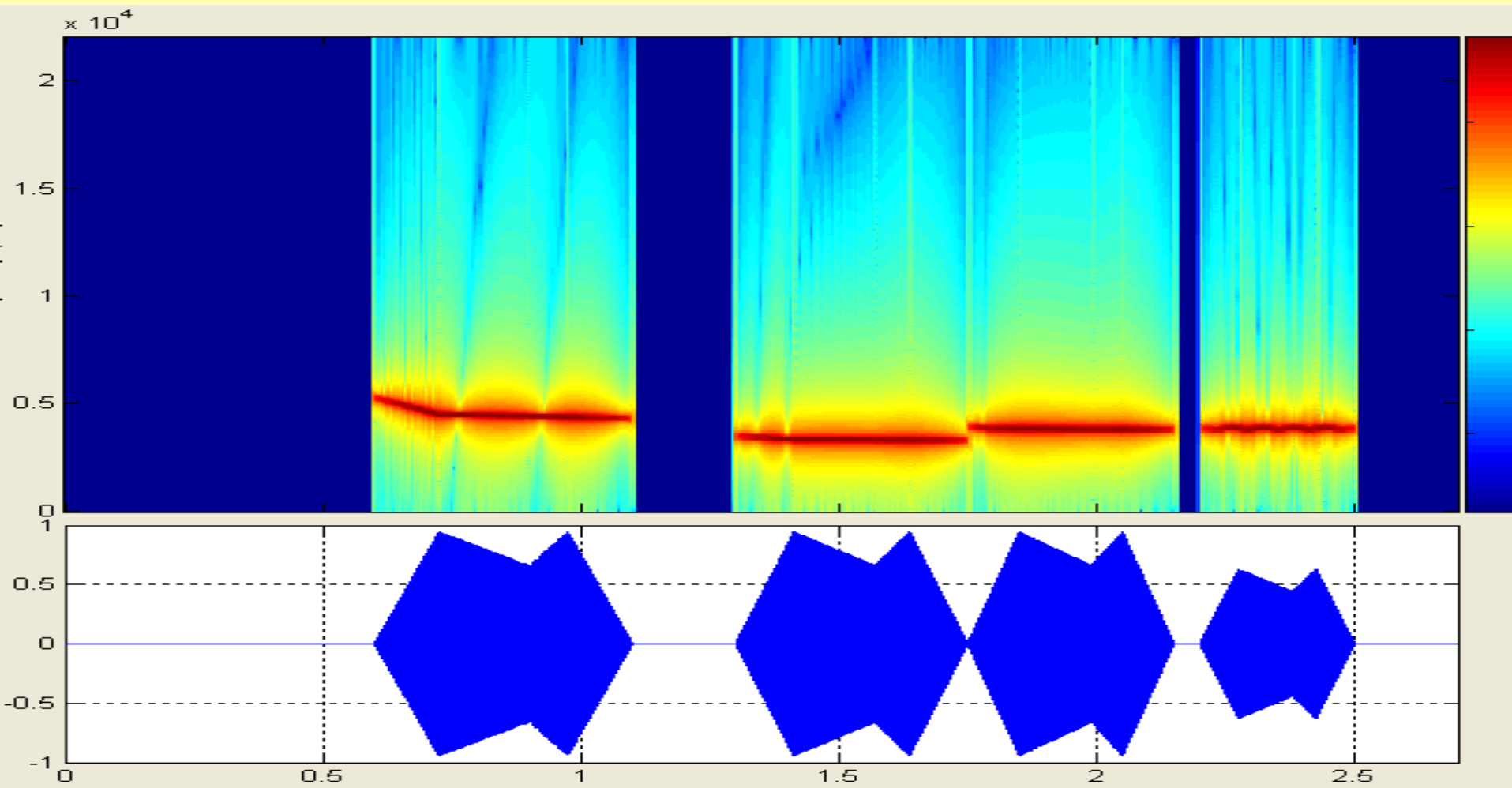




Aditivní syntéza ptáků IX



- *Strnavec zlatotemenný - Zonotrichia atricapilla*

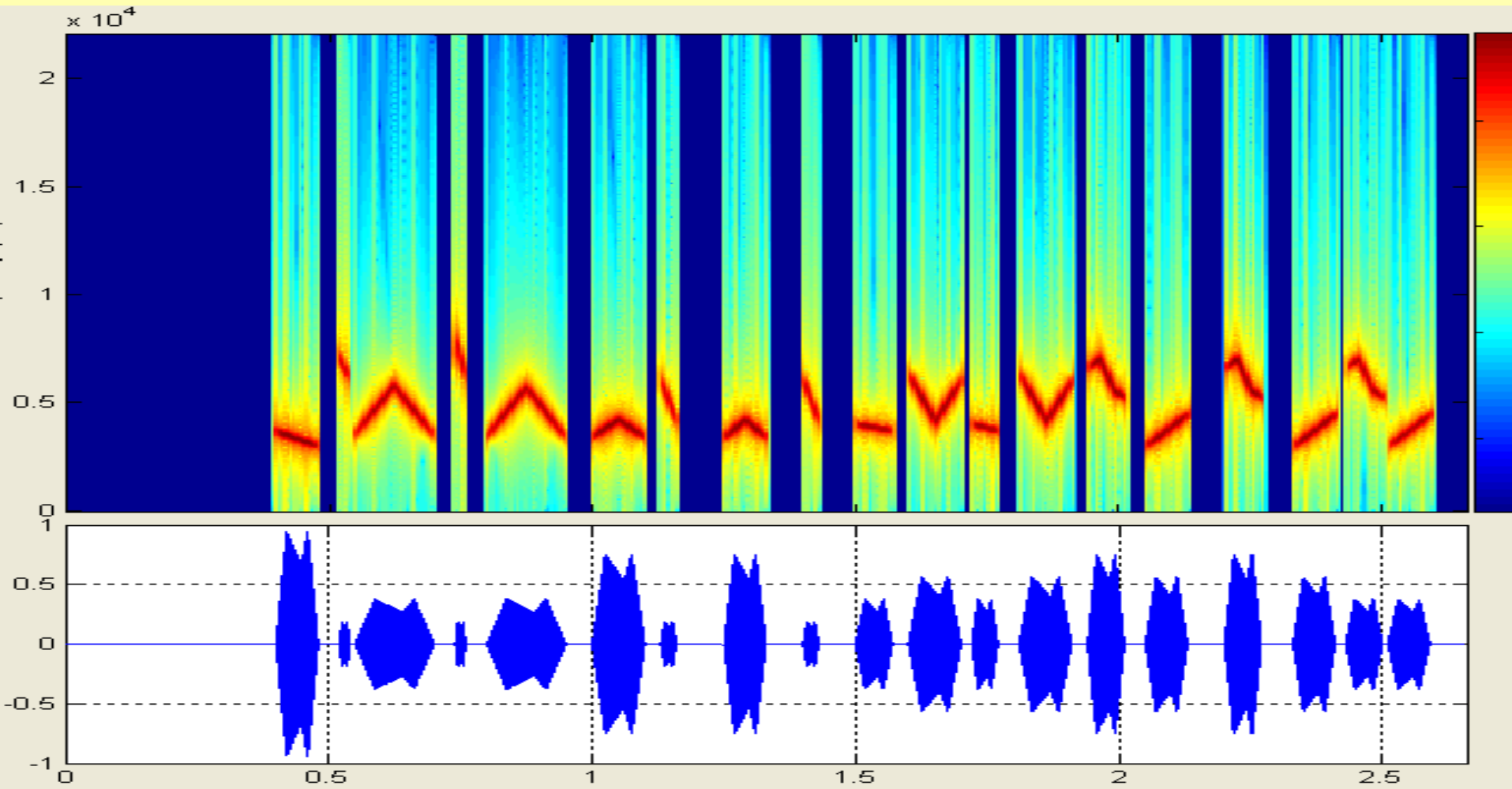




Aditivní syntéza ptáků X



- *Papažík indigový - Passerina cyanea*

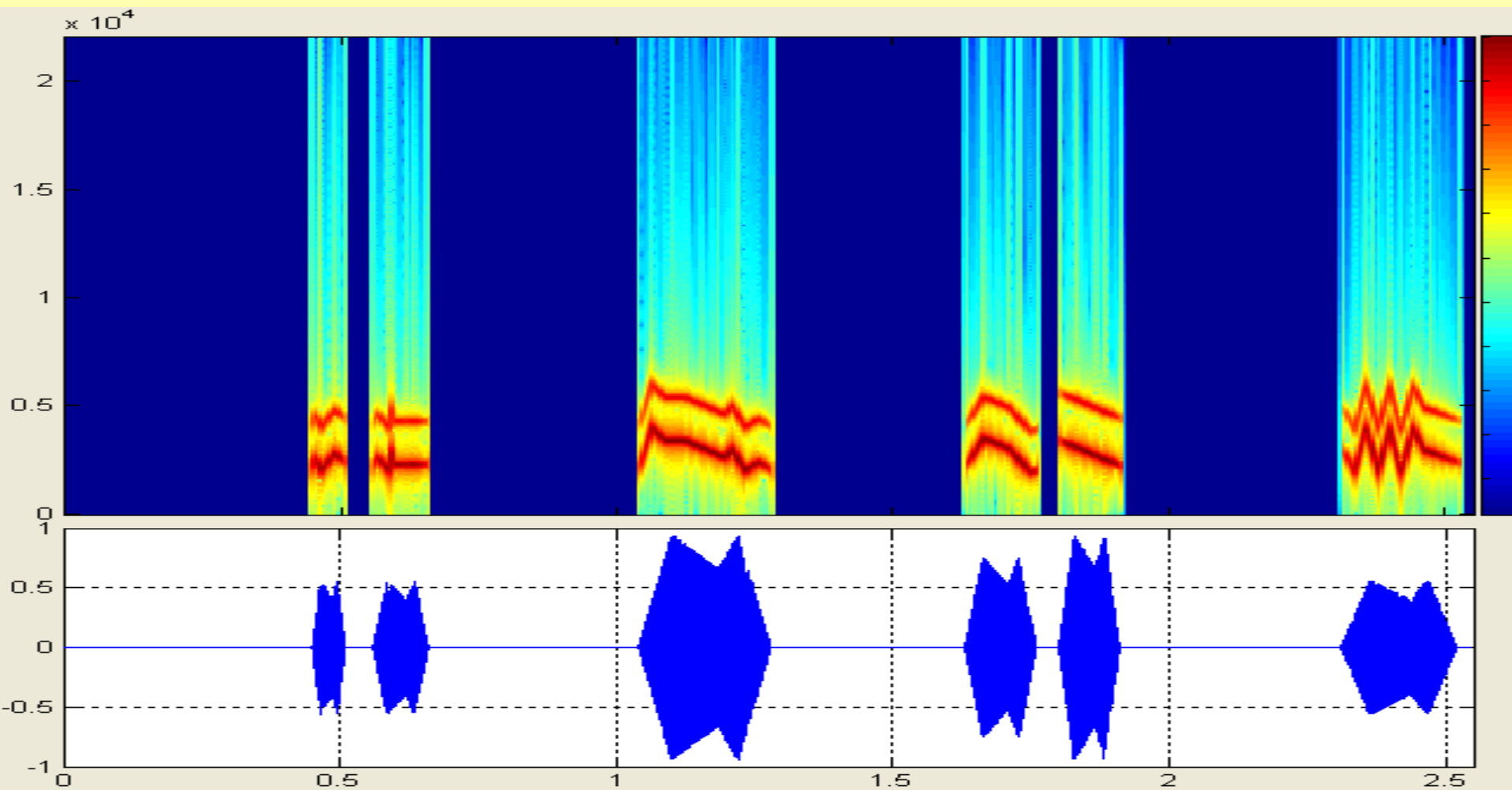




Aditivní syntéza ptáků XI



- *Drozd stěhovavý - Turdus migratorius*

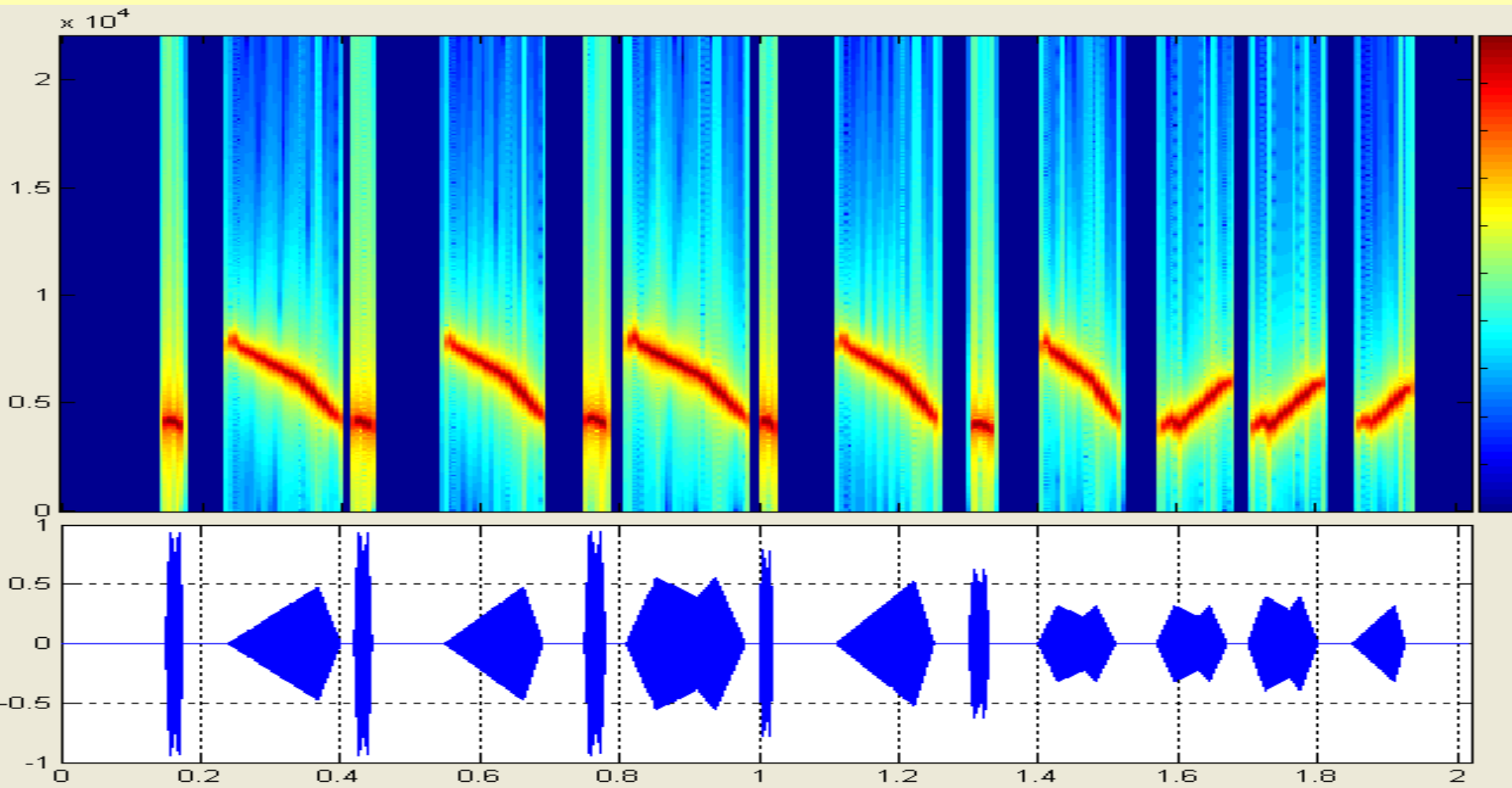




Aditivní syntéza ptáků XII



- *Lesňáček čevenoskrvný - Vermivora ruficapilla*





Aditivní syntéza ptáků XIII



- Pipilo rudoooký - Pipilo erythrophthalmus*

