

31ZZS – 9. PŘEDNÁŠKA

24. listopadu 2014

SPEKTRÁLNÍ ANALÝZA

- **Fourierovy řady**
- **Diskrétní Fourierovy řady**
- **Fourierova transformace**
- **Diskrétní Fourierova transformace**
- **Spektrální analýza**
- **Zobrazení signálu ve frekvenční oblasti**
 - **Spektrum**
 - **Spektrogram**
 - **Reliéf**
 - **Aplikace - fázový vokodér**



Fourierovy řady I

- ***Jean Baptiste Fourier***
(francouzský matematik 1768 - 1830)

- ***Harmonická analýza***

Libovolný *periodický* signál lze rozložit na jednotlivé harmonické složky.

- ***Harmonická syntéza***

Kombinací harmonických složek lze vytvořit prakticky libovolný *periodický* signál.

Fourierovy řady II

- *Trigonometrický tvar Fourierových řad*

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)]$$

a_0 ...stejnoseměrná složka
 a_k, b_k ...koeficienty Fourierovy řady
 k ...pořadí harmonické složky

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(k\omega_0 t) dt \quad a_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(k\omega_0 t) dt$$

Fourierovy řady III

- **Spektrální (polární) tvar Fourierových řad**

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$$

c_k ... amplituda k -té spektrální složky
 φ_k ... fáze k -té spektrální složky

$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad \varphi_k = \arctan \frac{b_k}{a_k}$$

Fourierovy řady IV

- **Komplexní (exponenciální) tvar Fourierových řad**

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t}$$

X_k ... komplexní koeficient

$$X_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k)$$

$$c_k = 2|X_k|$$

Fourierovy řady

$$X_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

Diskrétní Fourierovy řady

- K výpočtu spektra **periodických** číslicových signálů lze použít vztah

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi nk/N}$$

$$X_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

- Pro signál popsaný N vzorky je podstatných **$N/2$ hodnot** spektra. Dalšíh $N/2$ hodnot jsou čísla komplexně sdružená a není třeba je počítat.
- Výpočtem podle výše uvedeného vztahu dostaneme **diskrétní spektrum** s hodnotami komplexních koeficientů na frekvencích $k \cdot Fs/N$.
- Spektrum můžeme počítat i pro $k > N$, dostaneme však stejné hodnoty jako pro základní interval $-N/2 < k < N/2$. Spektrum číslicových signálů **je periodické** s periodou Fs .

Od periodických signálů k neperiodickým

$$X_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

- **Spojité signály** (popsané analytickou funkcí)
- Na neperiodický signál se nahlíží jako na signál, jehož $T \rightarrow \infty$
- Místo FŘ se používá FT
- Protože $T \rightarrow \infty$, $\Delta f \rightarrow 0$... spektrum spojitě

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

Od FT k DFT

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

- **Číslicové signály** (nejsou spojité a nejsou nekonečně dlouhé)
- Numerický ekvivalent FT bude

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi nk/N}$$

- DFT je popsána stejným vztahem jako DFŘ
- Spektrum číslicového signálu je **diskrétní a periodické**

Diskrétní Fourierova transformace

- **Definiční vztah**

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi nk/N}$$

- **Vstupem** je N hodnot čísl. signálu (podle předpokladu jde o 1 periodu)
- **Výstupem** je N hodnot komplexních koeficientů spektra na normovaných frekvencích k/N , tj. na reálných frekvencích $k \cdot F_s/N$.
- Spektrum je periodické s periodou F_s , tj pro $k > N$ dostaneme tytéž hodnoty.
- Hodnoty koeficientů pro $N/2 < k < N$ jsou komplexně sdružené s prvními $N/2$ hodnotami, netřeba je počítat. Při určování modulu jednostranného spektra je nutné násobit dvěma.
- Pokud vybraných N vzorků signálu netvoří jednu periodu (v praxi je to téměř vždy), jsou výsledné hodnoty zatíženy chybami (objeví se neexistující složky).

Zpětná (inverzní) DFT

DFT

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi nk/N}$$

IDFT

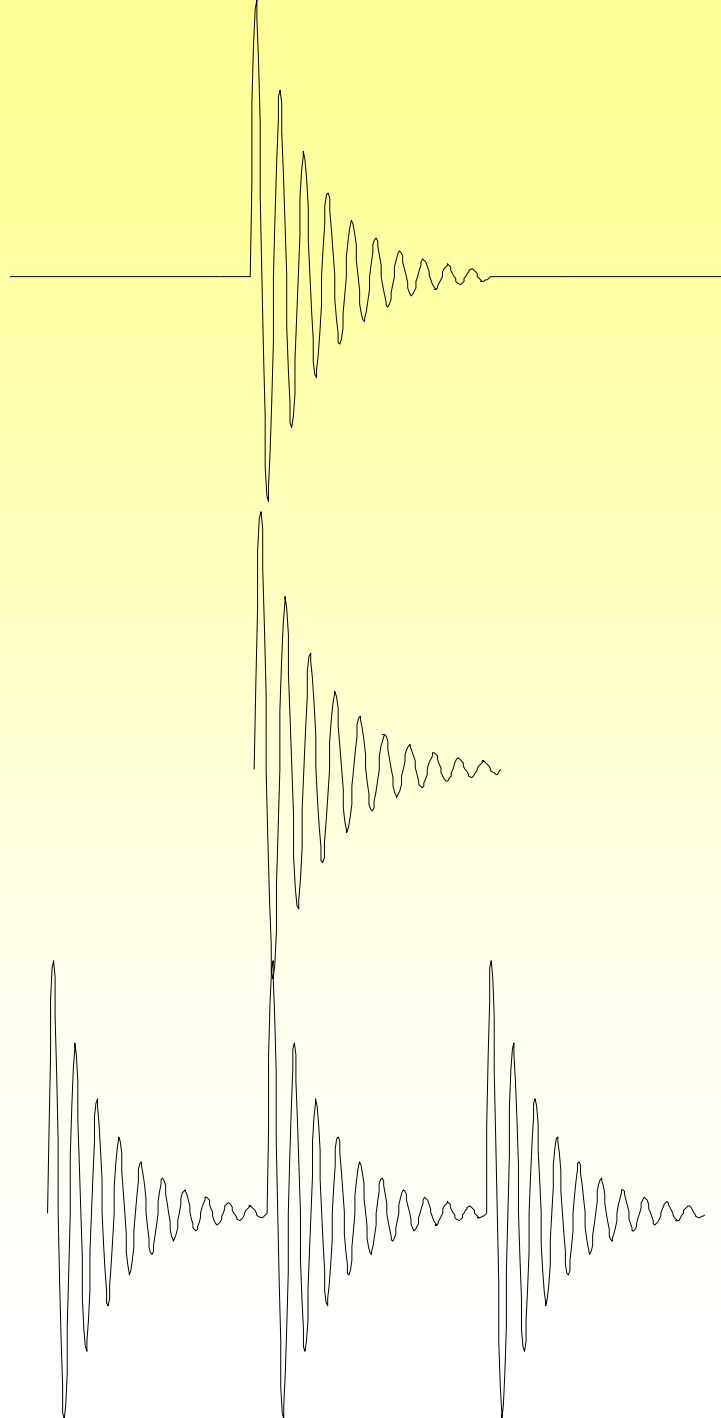
$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi nk/N}$$

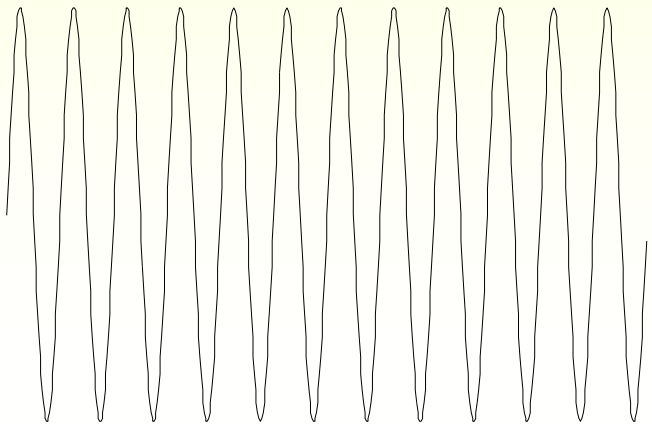
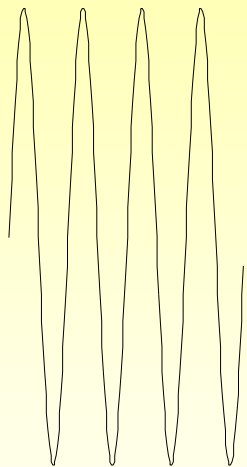
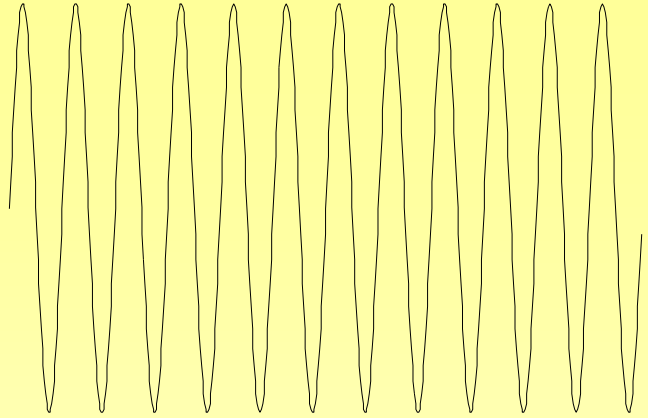
- Vztah pro IDFT se liší od DFT pouze ve znaménku exponenciální funkce. Normovací koeficient $1/N$ se někdy uvádí u DFT.
- Do IDFT vstupuje vždy N hodnot dvoustranného spektra, tj. nejenom $N/2$ hodnot jednostranného spektra.
- Pokud na signál aplikujeme nejprve DFT a následně IDFT, dostaneme tentýž signál. Vyplývá to z toho, že popis signálu v časové i ve frekvenční oblasti je ekvivalentní co do úplnosti informace. (Ve spektrální oblasti však musíme vždy uvažovat jak modul, tak i fázi.)

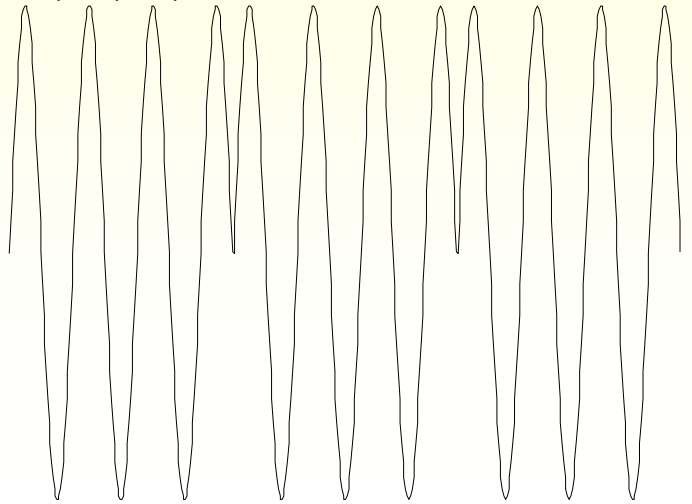
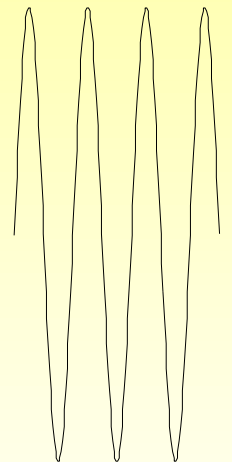
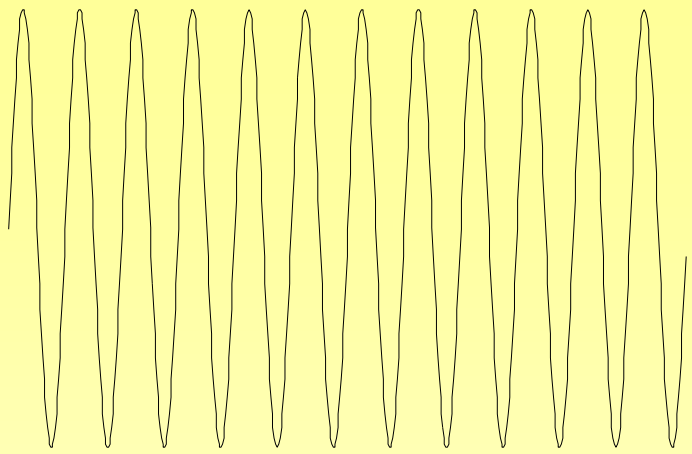
Fast Fourier Transform

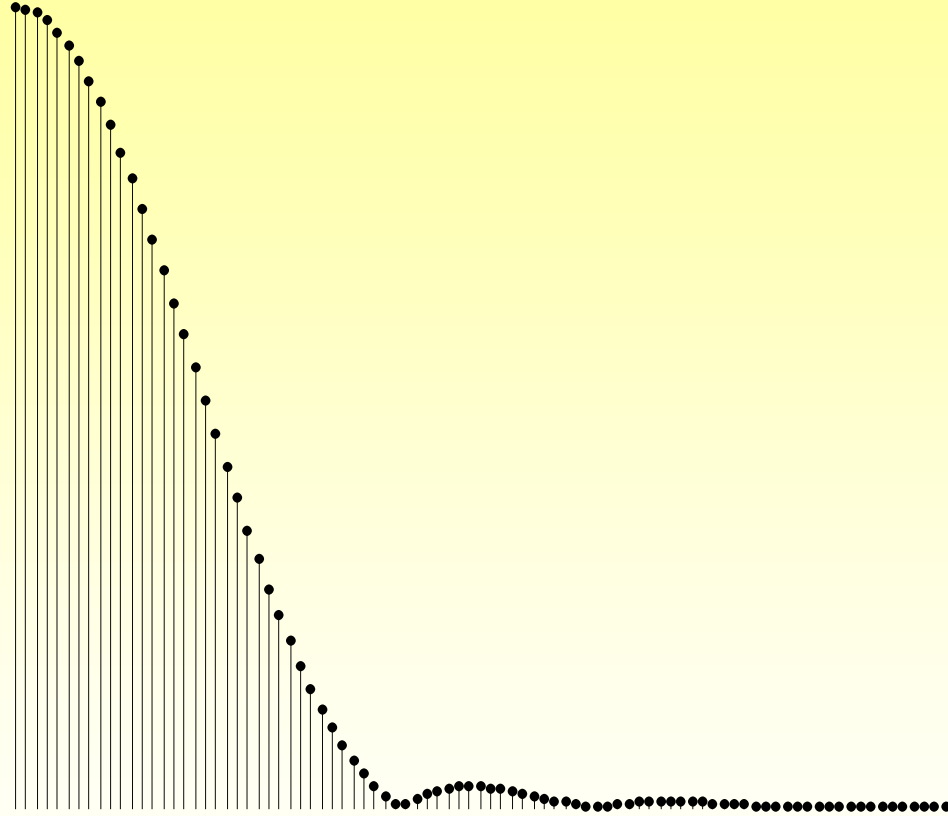
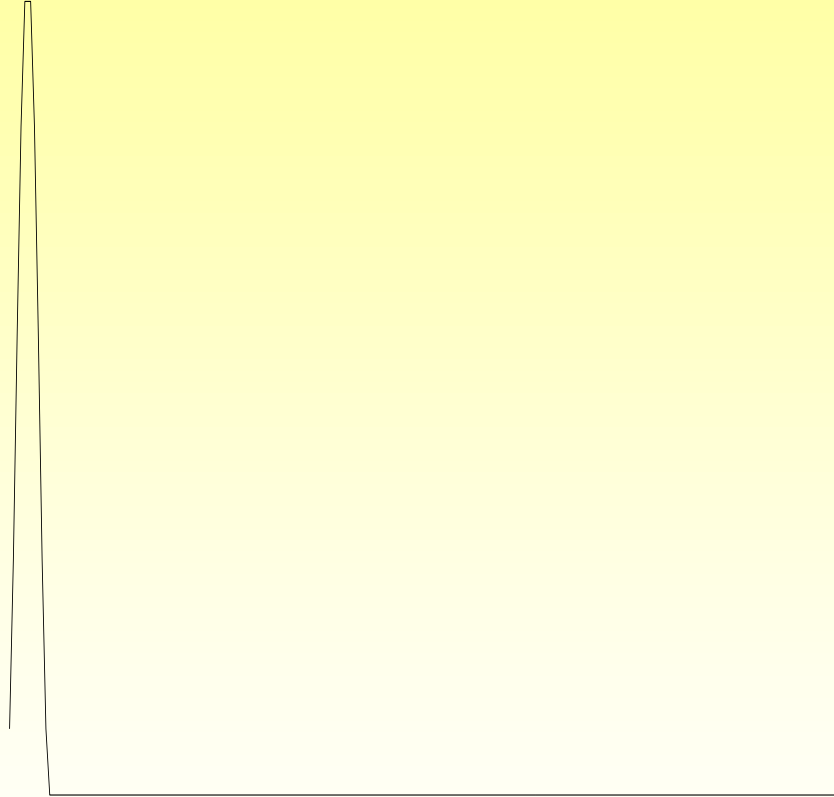
- FFT – rychlý algoritmus výpočtu DFT
- Poskytuje stejné hodnoty jako DFT, ale mnohem rychleji
- Vysoké rychlosti je dosaženo optimalizovaným způsobem
 - symetričnost exponenciálních členů, podobnost mezi lichými a sudými koeficienty...
- Nejrychleji funguje v případech, že N je mocninou 2
- Např. pro $N=1024$ je FFT 200x rychlejší než DFT

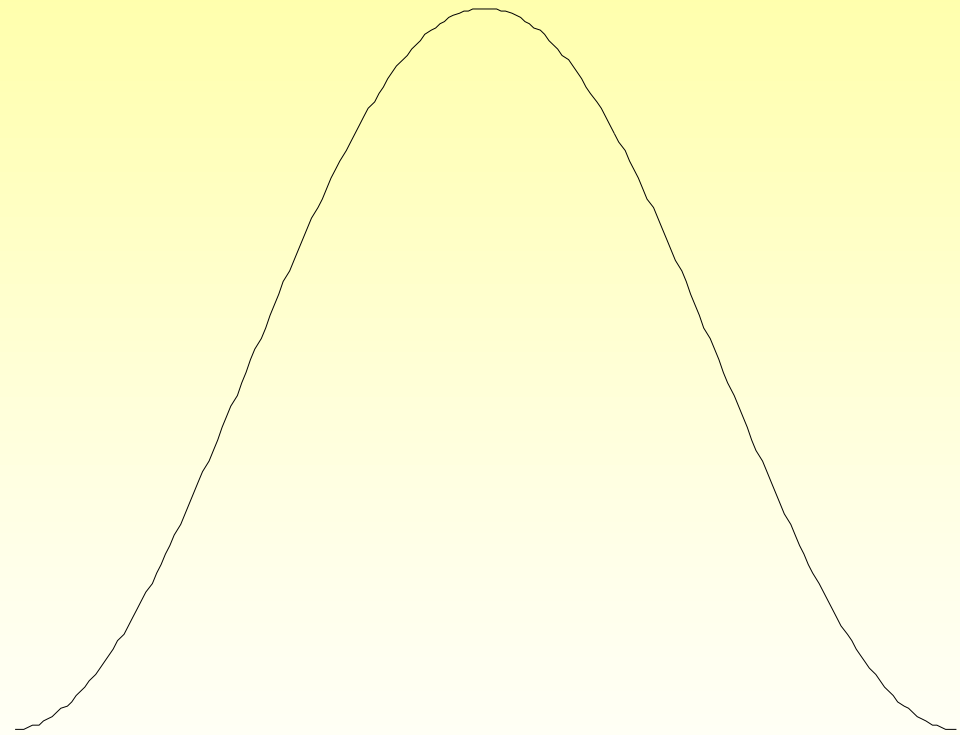
- V MATLABu
- `fft(x)` ...spočítá DFT pro signál x
- `ifft(X)`...spočítá IDFT pro spektrum X

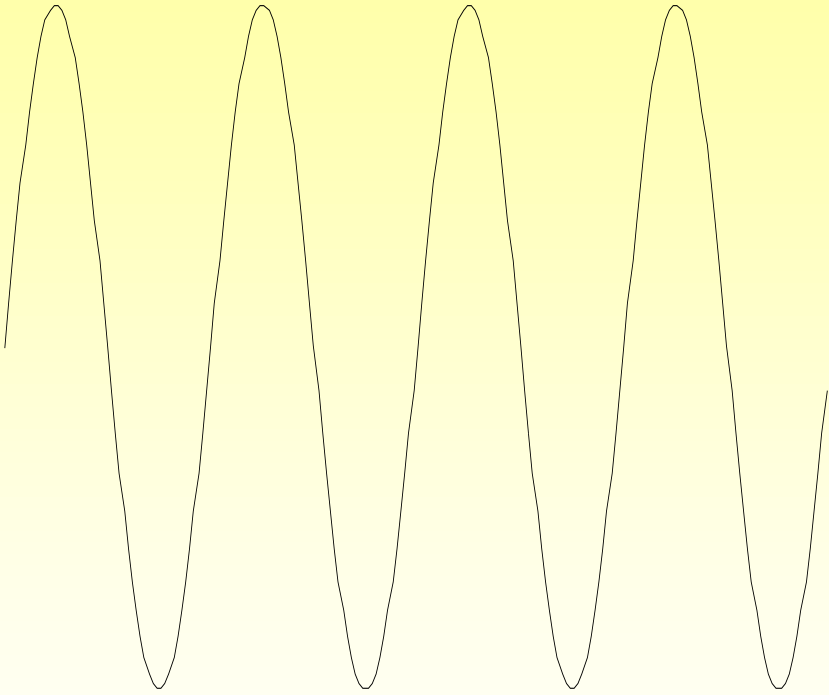


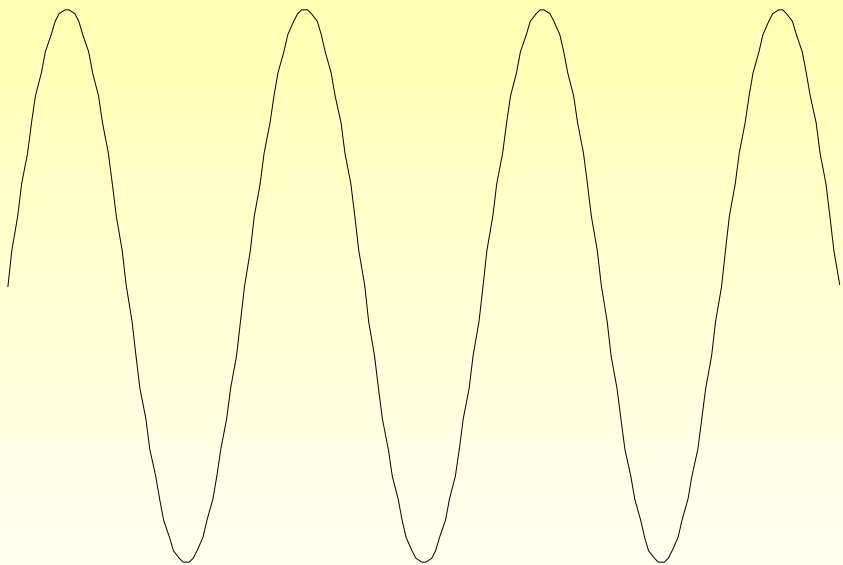


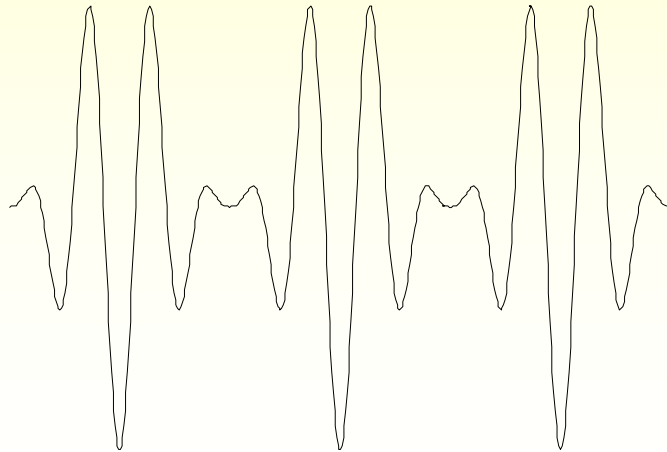
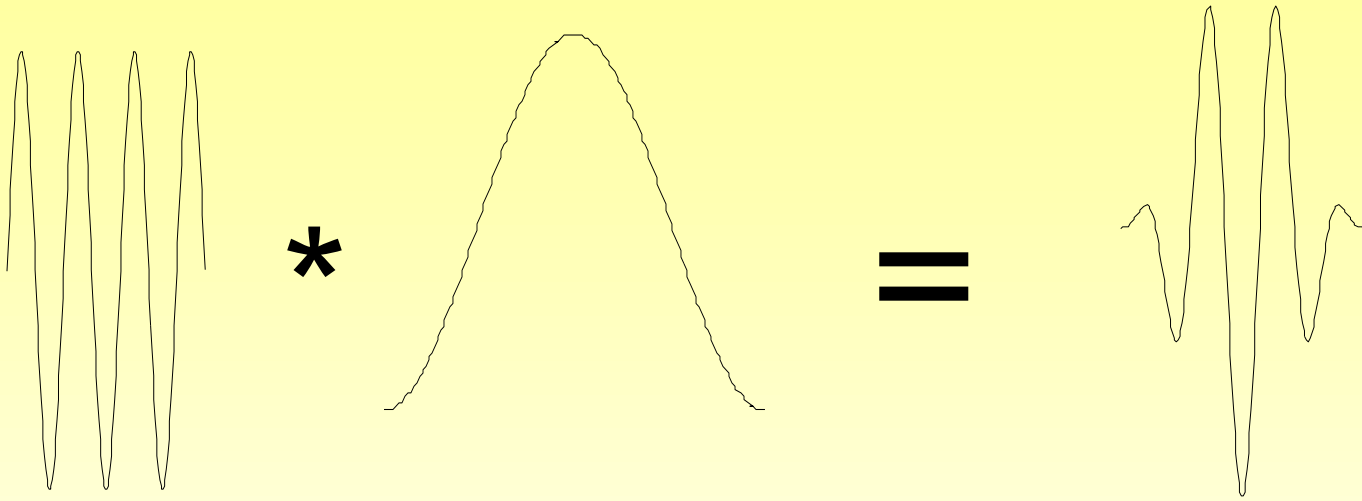


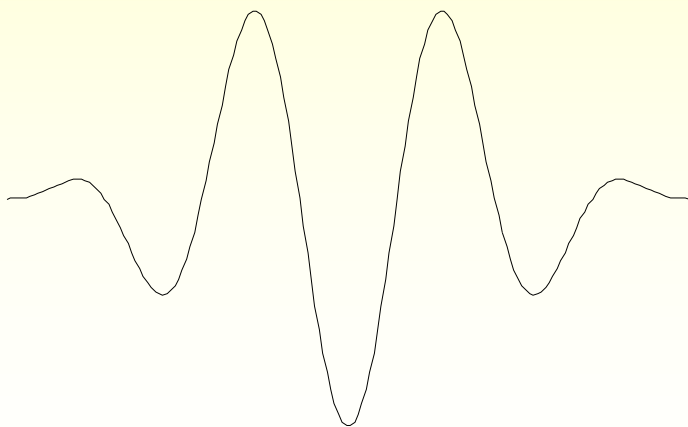
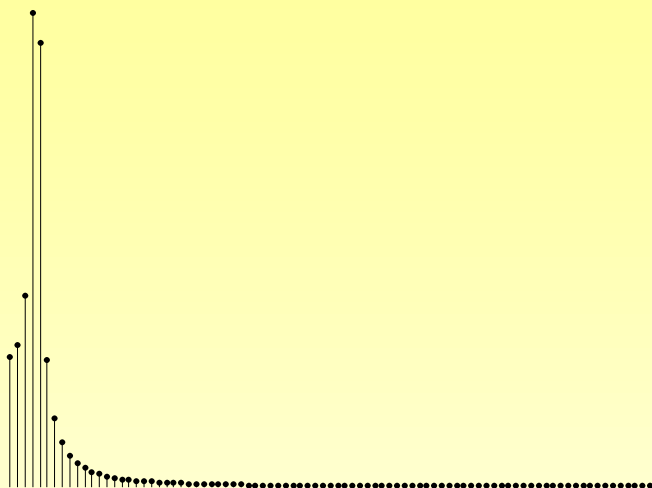
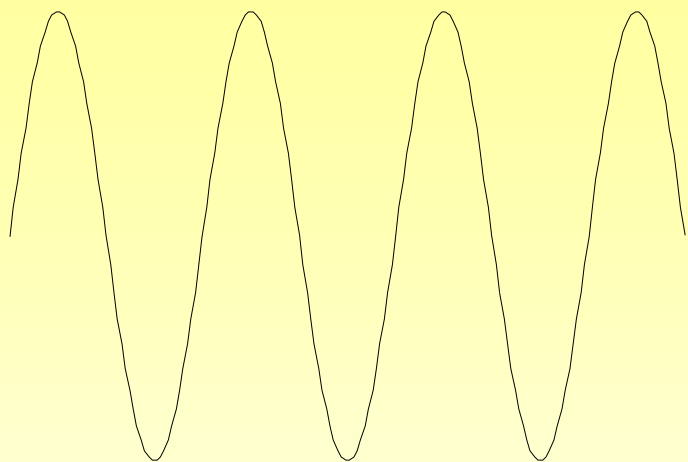


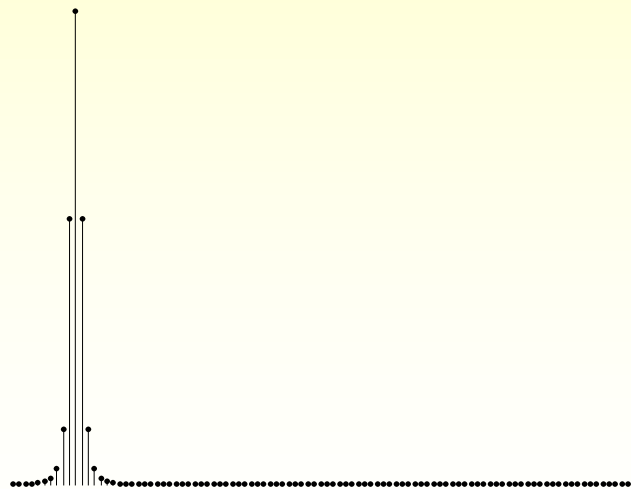
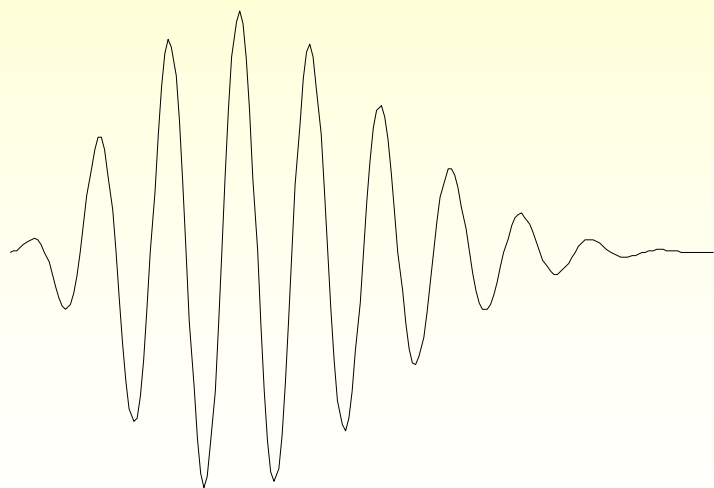
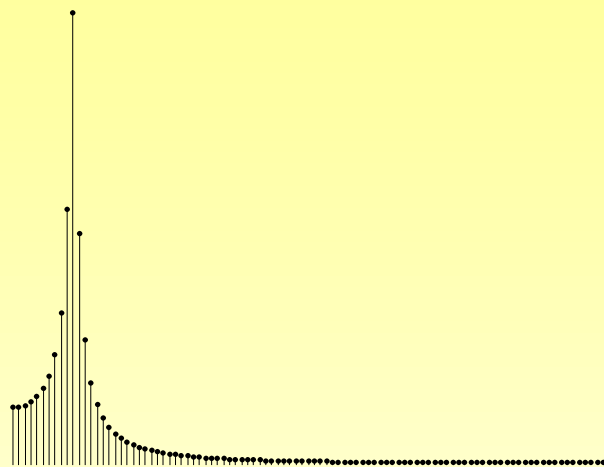
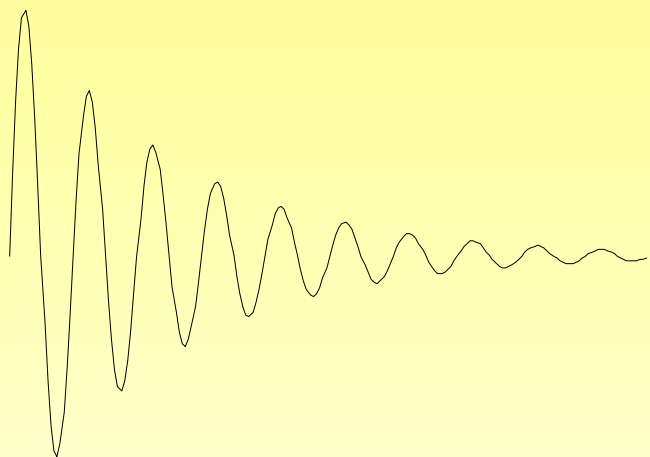


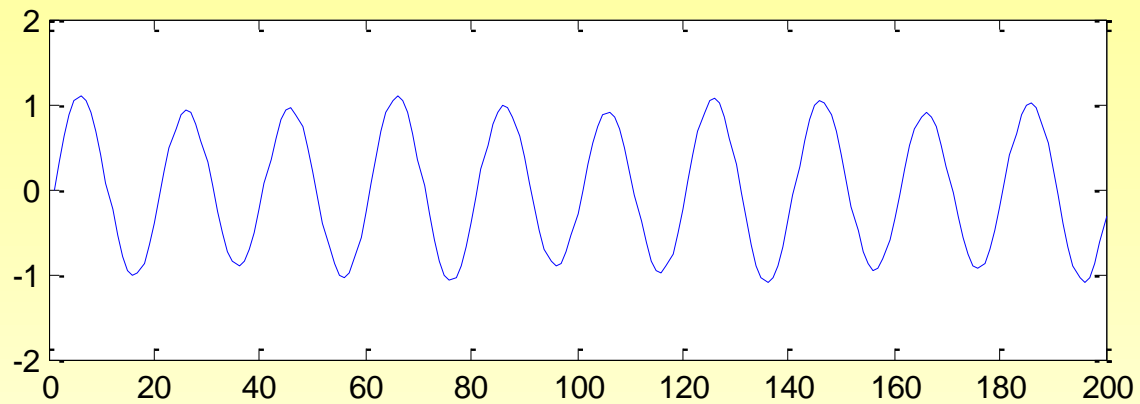


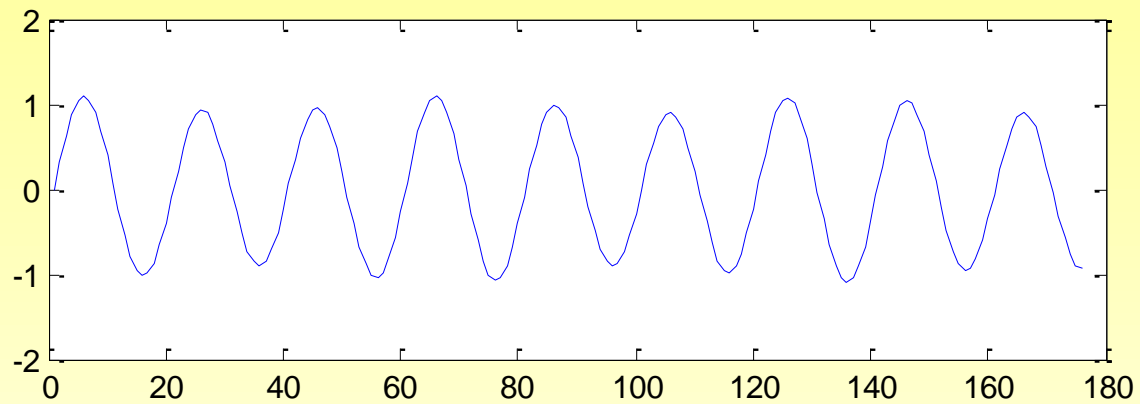


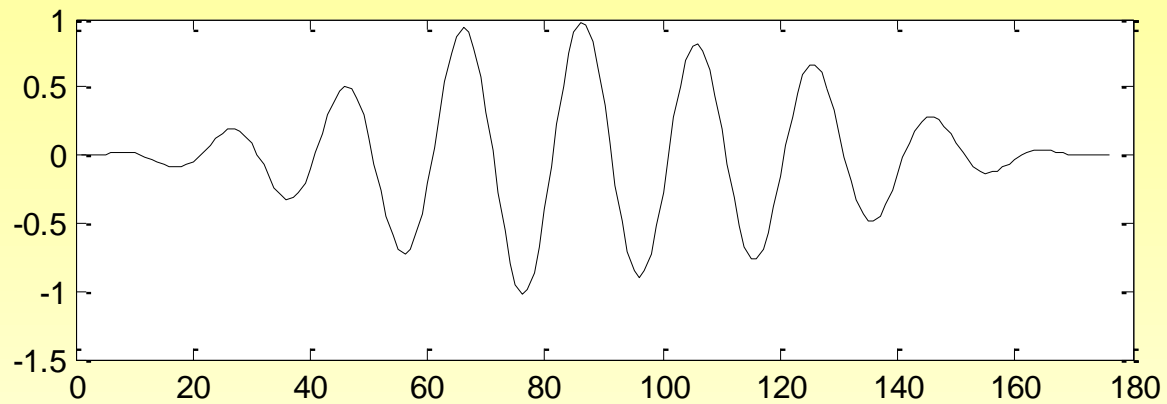








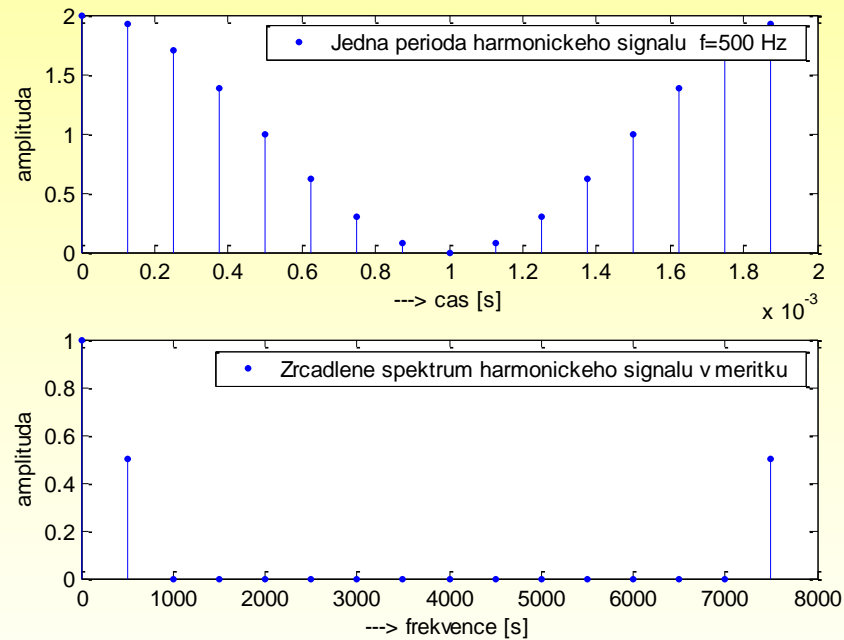




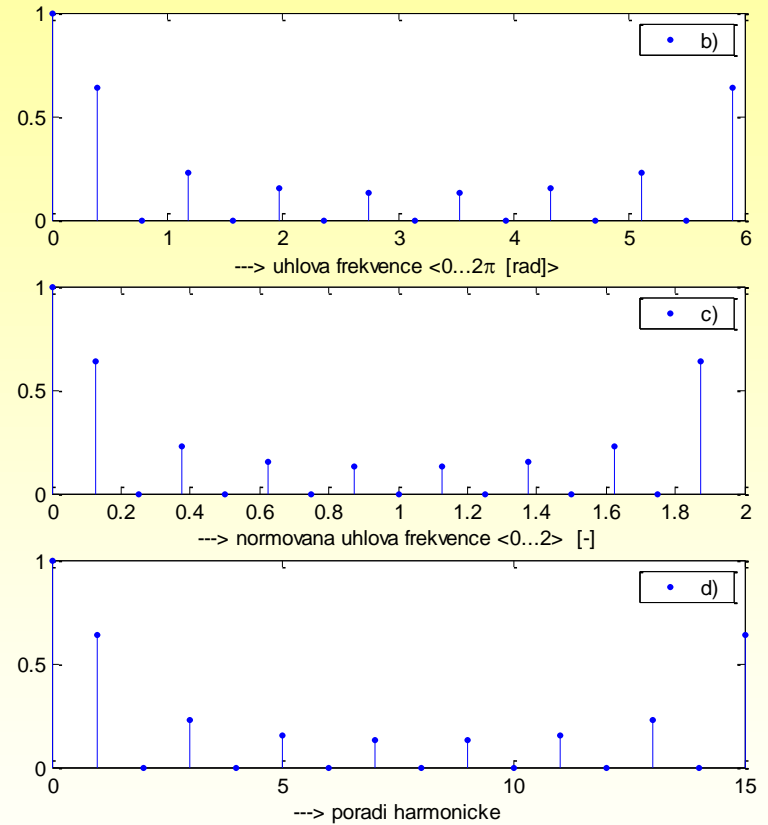
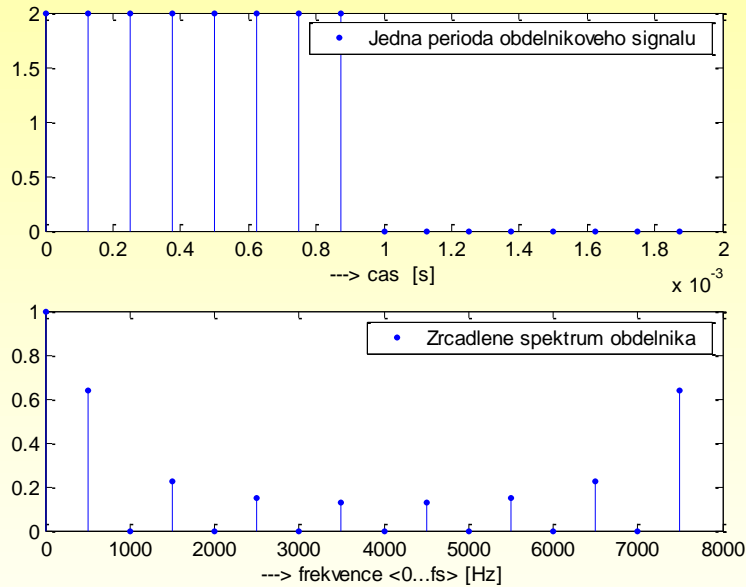
Praktická aplikace DFT a FFT

- Analyzovaný signál rozdělíme do kratších úseků
- Délku segmentu volíme tak, aby se počet vzorků N rovnal mocnině 2
- Pokud nelze zvolit N jako mocninu 2, doplníme signál nulami
- Vzorky vynásobíme vhodným oknem
- Pomocí FFT vypočítáme komplexní koeficienty spektra
- Do časové oblasti se lze vrátit pomocí IFFT

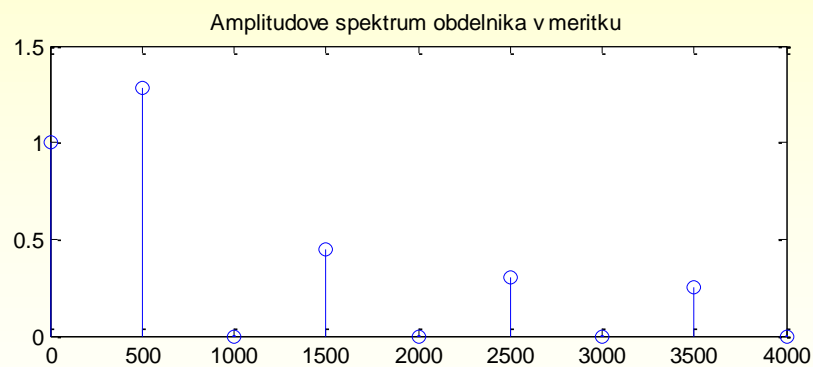
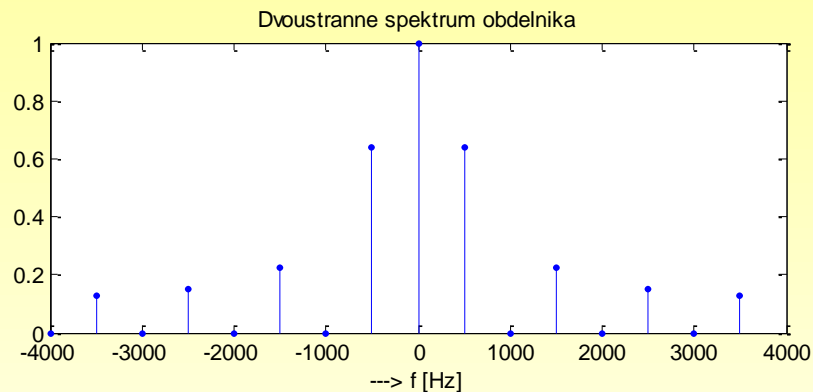
Zobrazení signálů ve frekvenční oblasti



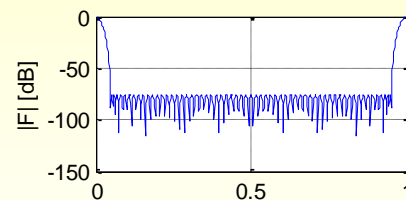
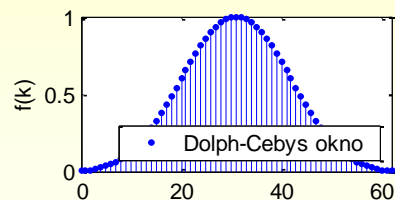
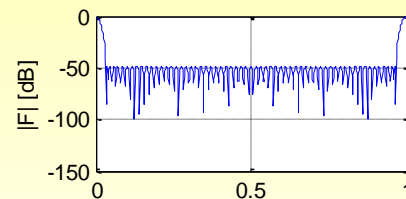
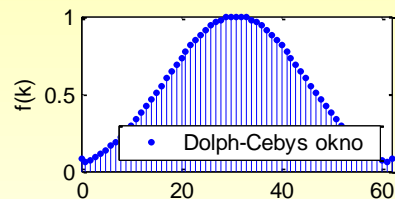
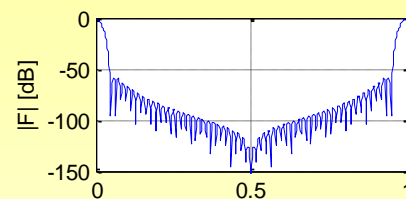
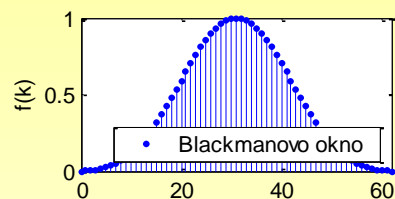
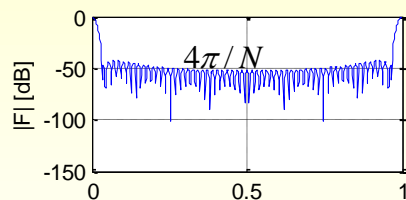
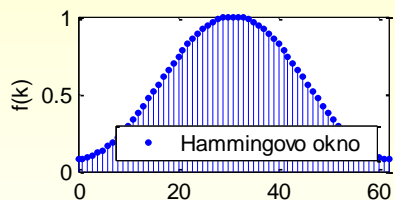
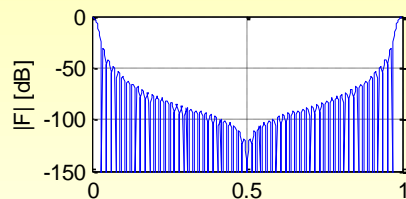
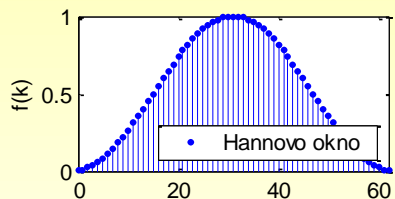
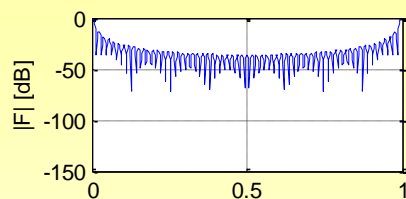
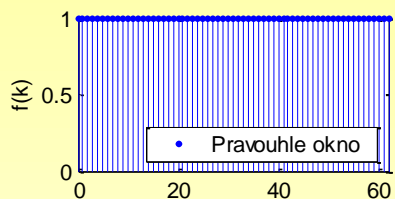
Frekvenční osa v periodogramu



Jednostranné a dvoustranné spektrum

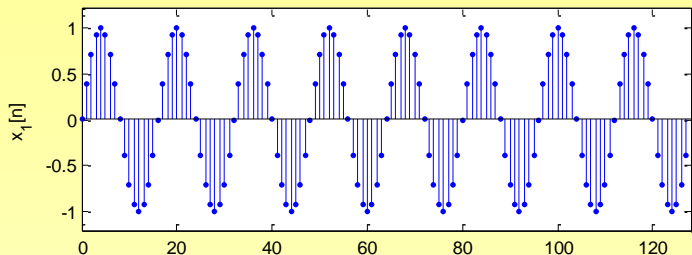


Porovnání oken

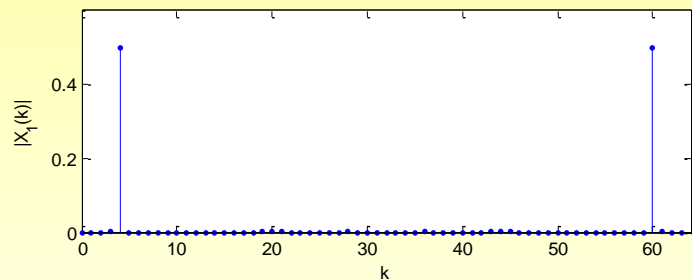


Potlačení prosakování váhováním signálu

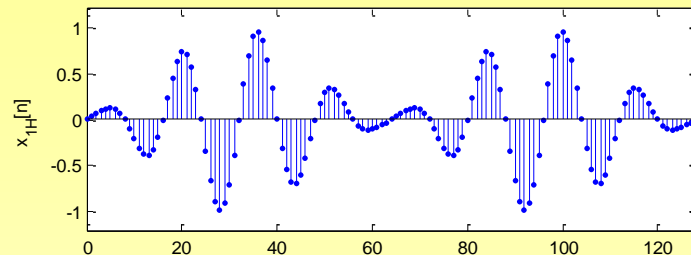
$x_1[n]=\sin(k*\pi/8)$, $n=0..63$, dve periody



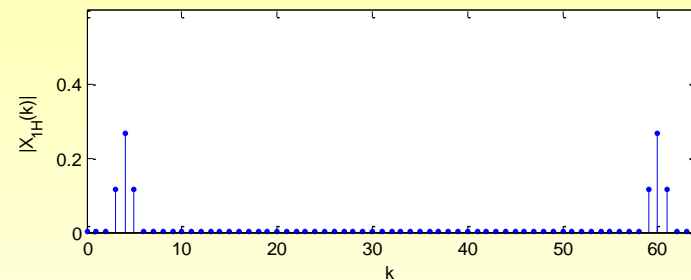
Spektrum $x_1[n]$



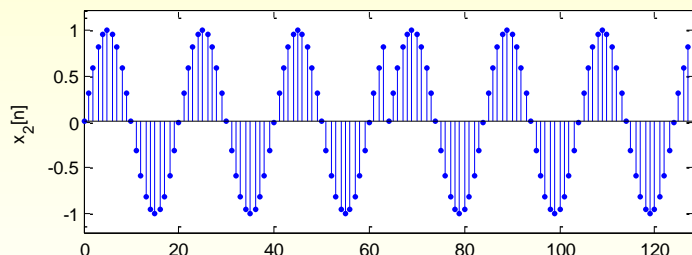
Signal $x_{1H}[n]$ vahovany Hammingovym oknem, dve periody



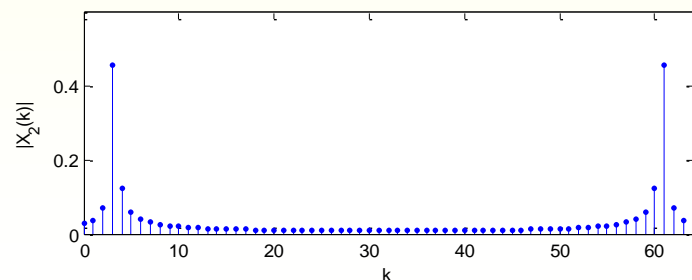
Spektrum signalu $x_{1H}[n]$ vahovaneho Hammingovym oknem



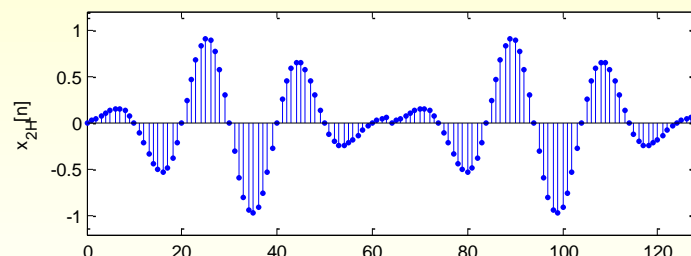
$x_2[n]=\sin(n*\pi/10)$, $n=0..63$, dve periody



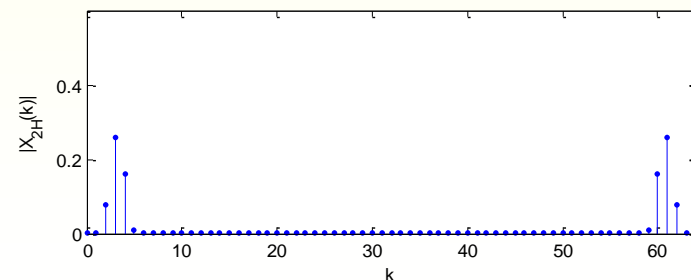
Spektrum signalu $x_2[n]$



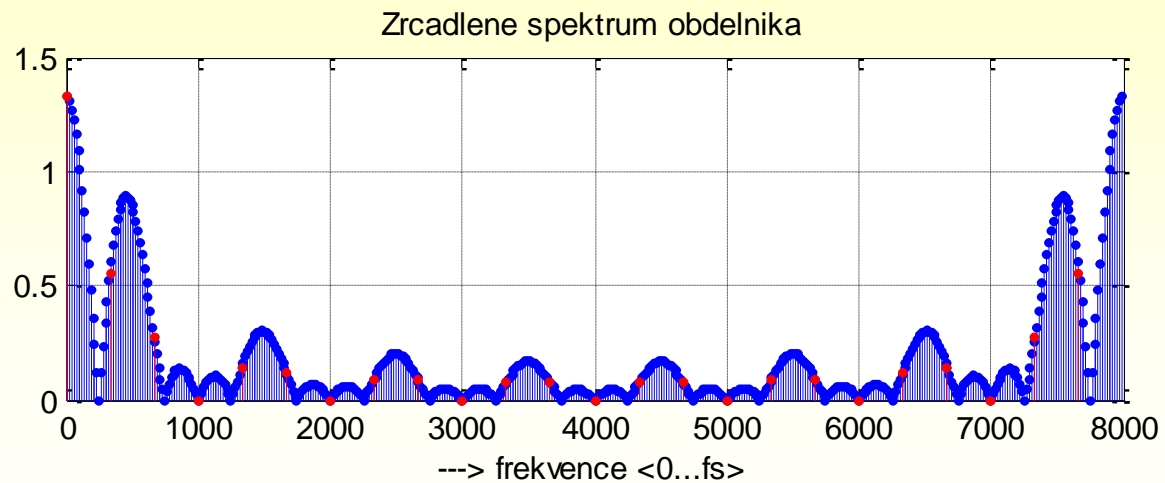
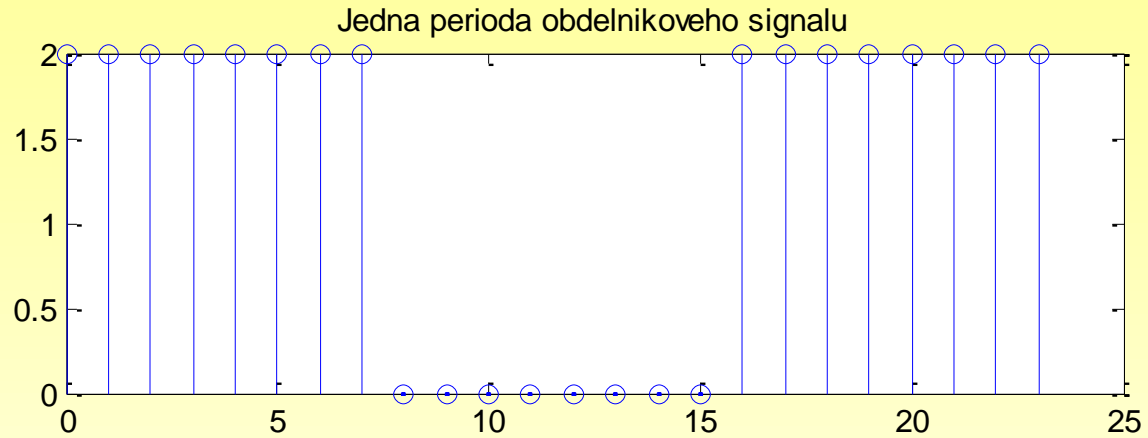
Signal $x_{2H}[n]$ vahovany Hammingovym oknem, dve periody



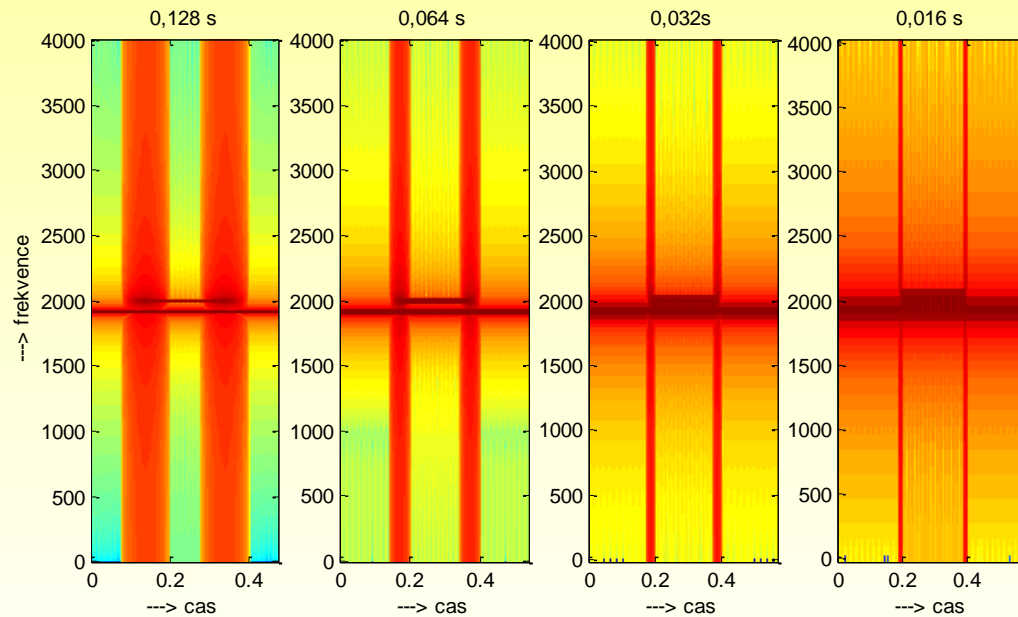
Spektrum signalu $x_{2H}[n]$ vahovaneho Hammingovym oknem



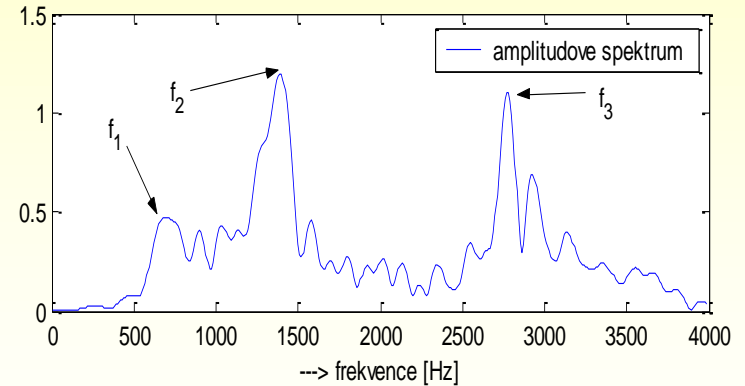
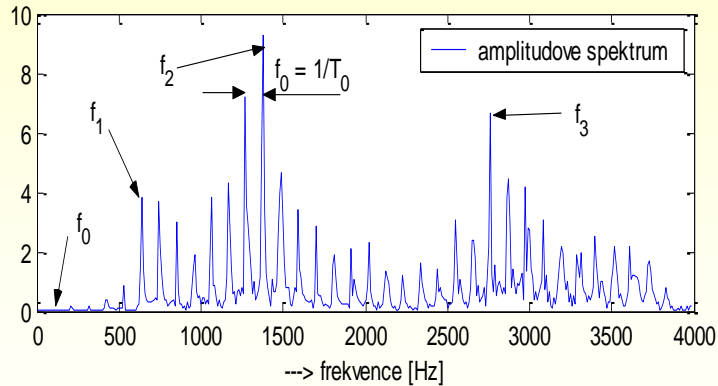
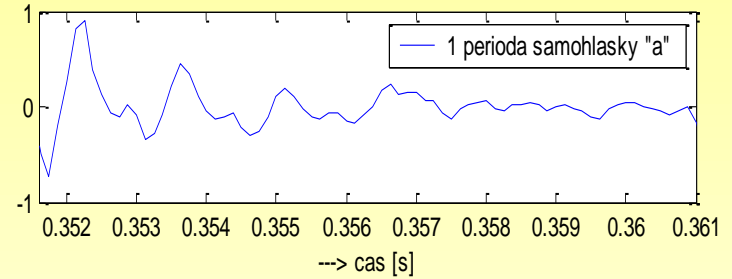
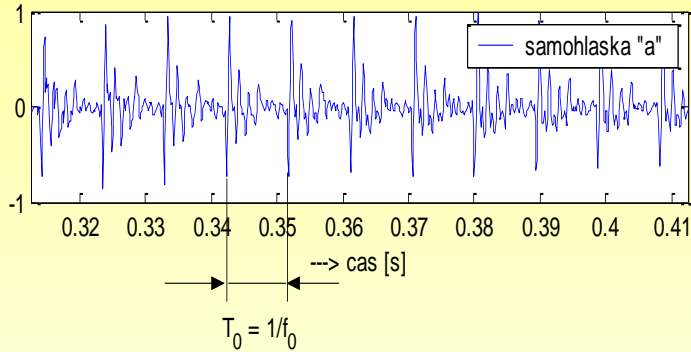
Doplňení nul



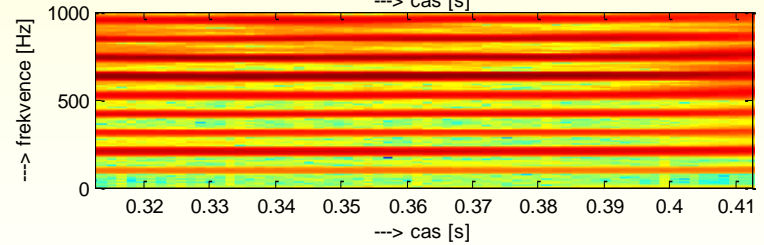
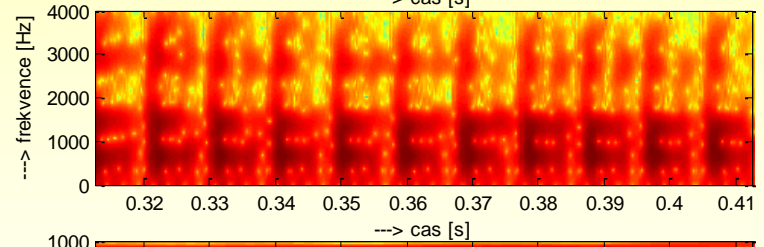
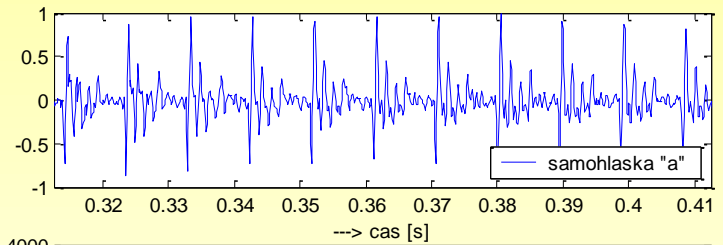
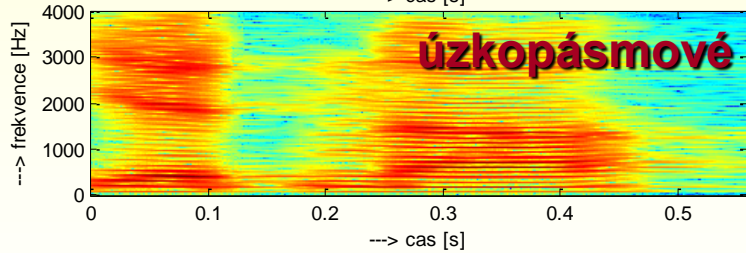
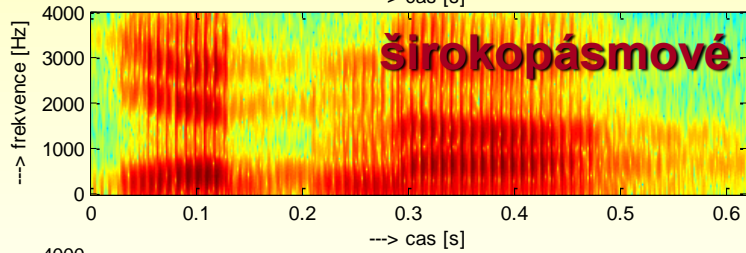
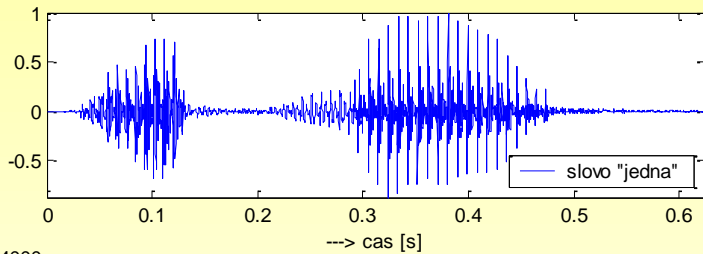
Spektrogramy – rozlišení



Spektrum samohlásek



Spektrogramy



Spektrogramy

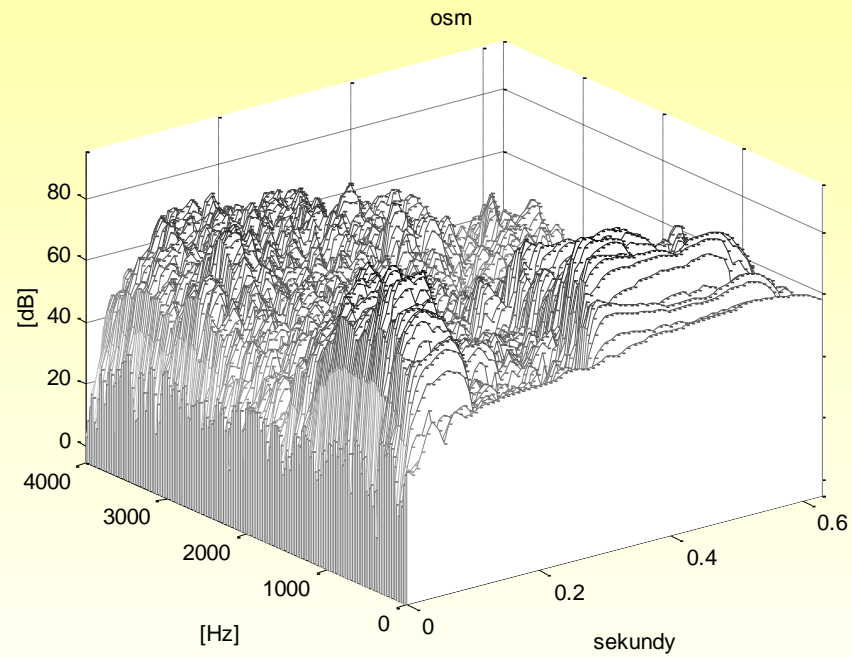
a) širokopásmový spektrogram – dobré rozlišení v čase
(základní frekvence je určena vertikálními pruhy)

```
load osum.asc;  
sig = osum; fs = 8000;  
subplot(2,1,1);  
specgram(sig,1024,fs,hamming(32),30);  
title('wideband spectrogram')  
xlabel(''), ylabel('frequency [Hz]')
```

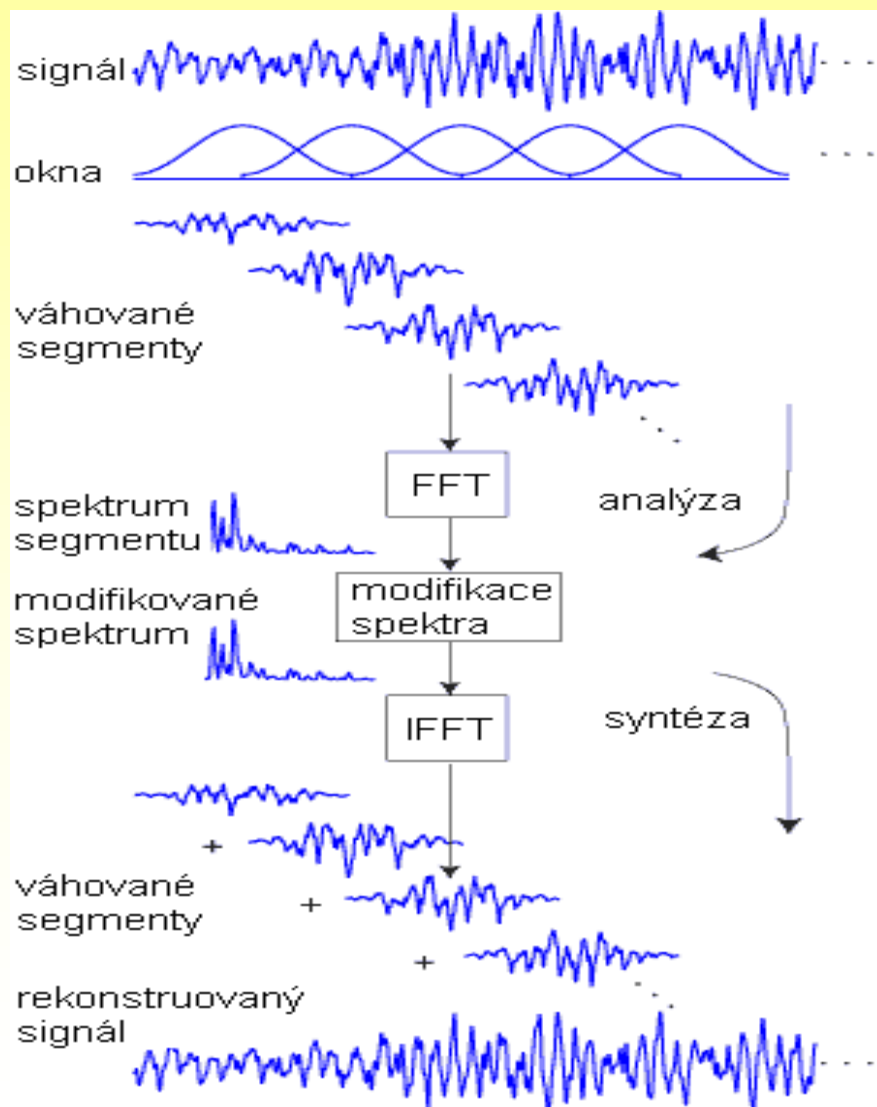
b) úzkopásmový spektrogram – dobré frekvenční rozlišení
(základní frekvence je určena horizontálními pruhy)

```
subplot(2,1,2);  
specgram(sig,1024,fs,hamming(512),500);  
title('narrowband spectrogram')  
xlabel('---> cas [s]'), ylabel('frequency [Hz]')
```

3d zobrazení



Aplikace: vokodér

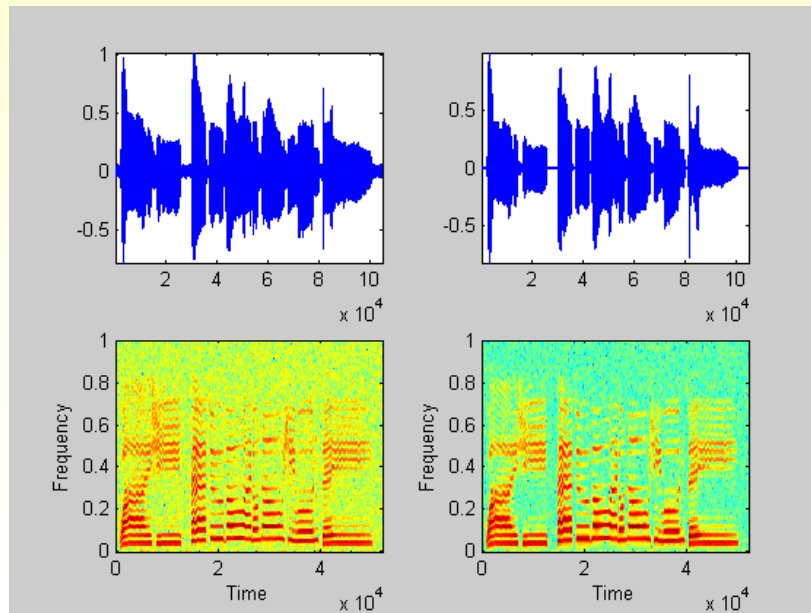


Vokodér

Triky s vokodérem 🗣️

Časové prodloužení a zkrácení 🗣️ 🗣️

Frekvenční posunutí 🗣️ 🗣️



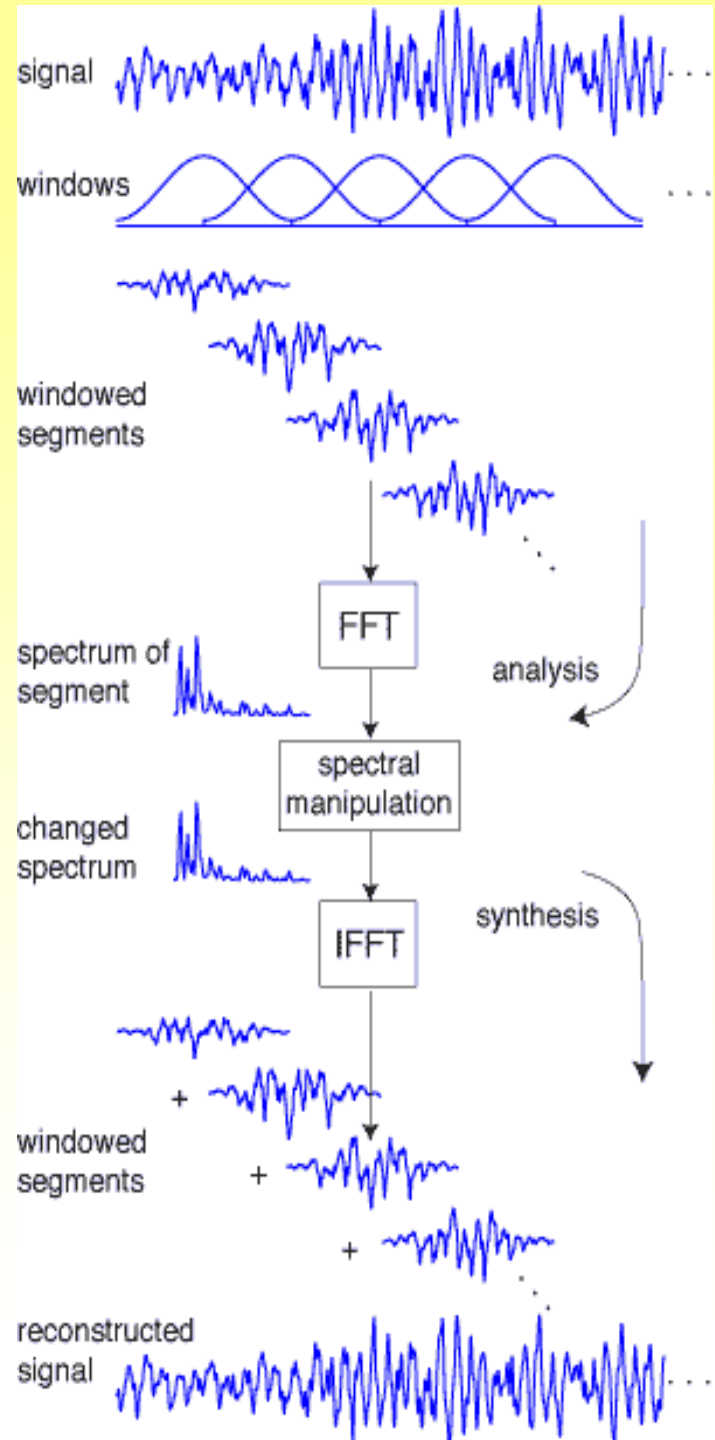
Vokodér

Krátkodobá Fourierova transformace

$$X_m = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_k e^{-j \frac{2\pi mk}{n}}$$

Re-syntéza

$$x_k = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} X_m e^{j \frac{2\pi mk}{n}}$$

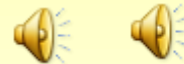


Vokodér

Triky s vokodérem

Prodlužení nebo zkrácení času (komprese, expanze) bez zkreslení základní periody

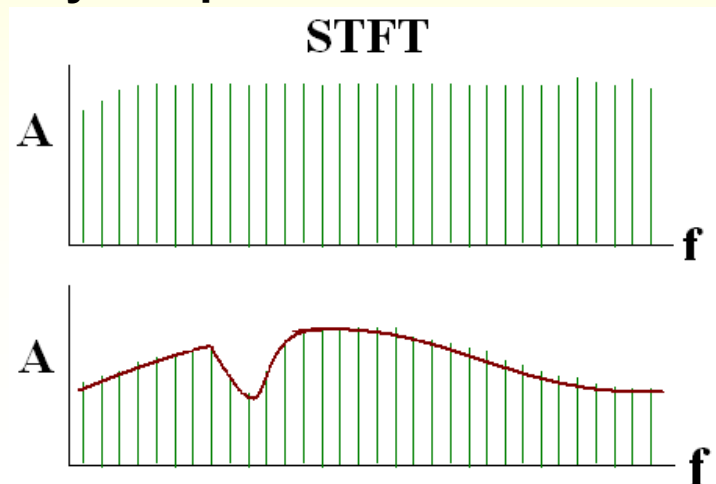
ve studiích využíváno k úpravě délky



Změna základní periody (pitch shifting) bez časového zkreslení

lze využít ve studiu ke korekcím

Libovolné změny ve spektrálních obálkách



Vokodér

Triky

Prodlužení nebo zkrácení času (komprese, expanze) bez zkreslení základní periody ve studiích využíváno k úpravě délky

- Úzkopásmový spektrogram (zachovává spektrální charakteristiky)
=> okno ~ 30-40 ms
- 50% - 75% překrytí je optimální pro rekonstrukci

SPEKTRÁLNÍ MANIPULACE - INTERPOLACE

- krok nové časové mřížky je dán $1/R$
- amplitudová spektra jsou lineárně interpolována
- pro rekonstrukci signálu původní je důležitý fázový rozdíl

Změna základní periody (pitch shifting) bez časového zkreslení

Časově pozměněný signál je převzorkován na původní délku

Vokodér I

```
% encode
```

```
X = []; k=1;
```

```
for start = 0:window_shift:N-window_length,  
    frame = sig(start+1:start+window_length)...  
        .*hamming(window_length);  
    X(:,k)=fft(frame);  
    k=k+1;
```

```
end
```

Vokodér II

```
% interpolation
%Y=X;
Xmag = interp1q([0:size(X,2) -
1] ',abs(X') , [0:1/R:size(X,2) -2] ');
new_grid=floor(0:1/R:size(X,2) -2) +1;
D=diff(angle(X'))';
D_new=D(:,new_grid);
phaseX = cumsum(D_new');
Y = (Xmag .* exp(j*phaseX))';
```

Vokodér III

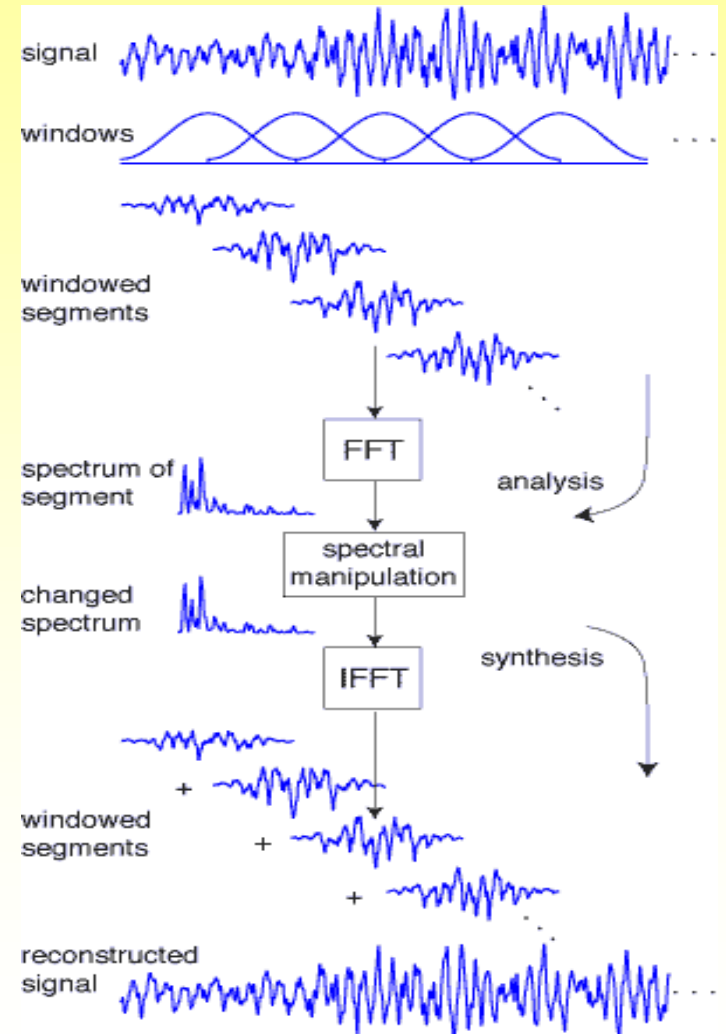
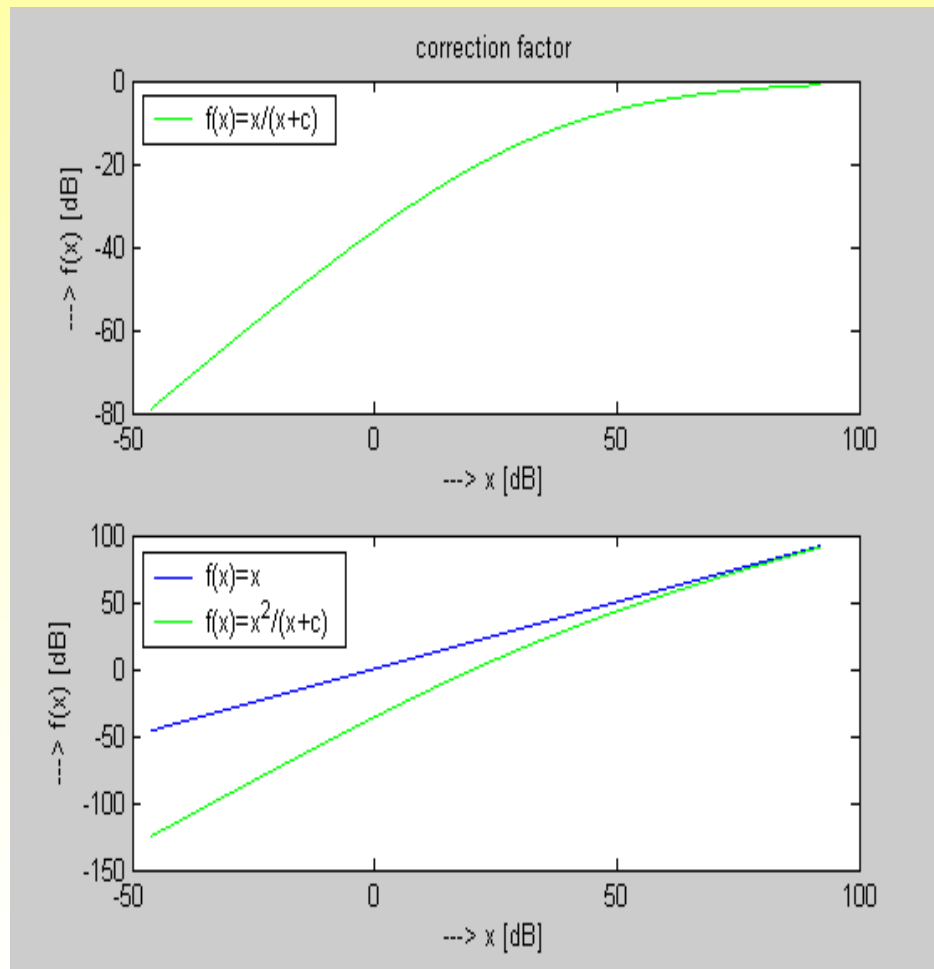
```
% decode
```

```
k=1; N_new=size(Y,2)*window_shift+window_length;  
signal_y=zeros(N_new,1);  
for start = 0:window_shift:(size(Y,2)-1)*window_shift,  
    segment=real(ifft(Y(:,k),window_length))...  
        .*hamming(window_length);  
    signal_y((start+1):(start+window_length))...  
        =signal_y((start+1):(start+window_length))+segment;  
    k=k+1;1  
end
```

Potlačení šumu pomocí vokodéru

nonlinear spectral subtraction

[Vaseghi, S.V.: Advanced Signal Processing and Digital Signal Processing]

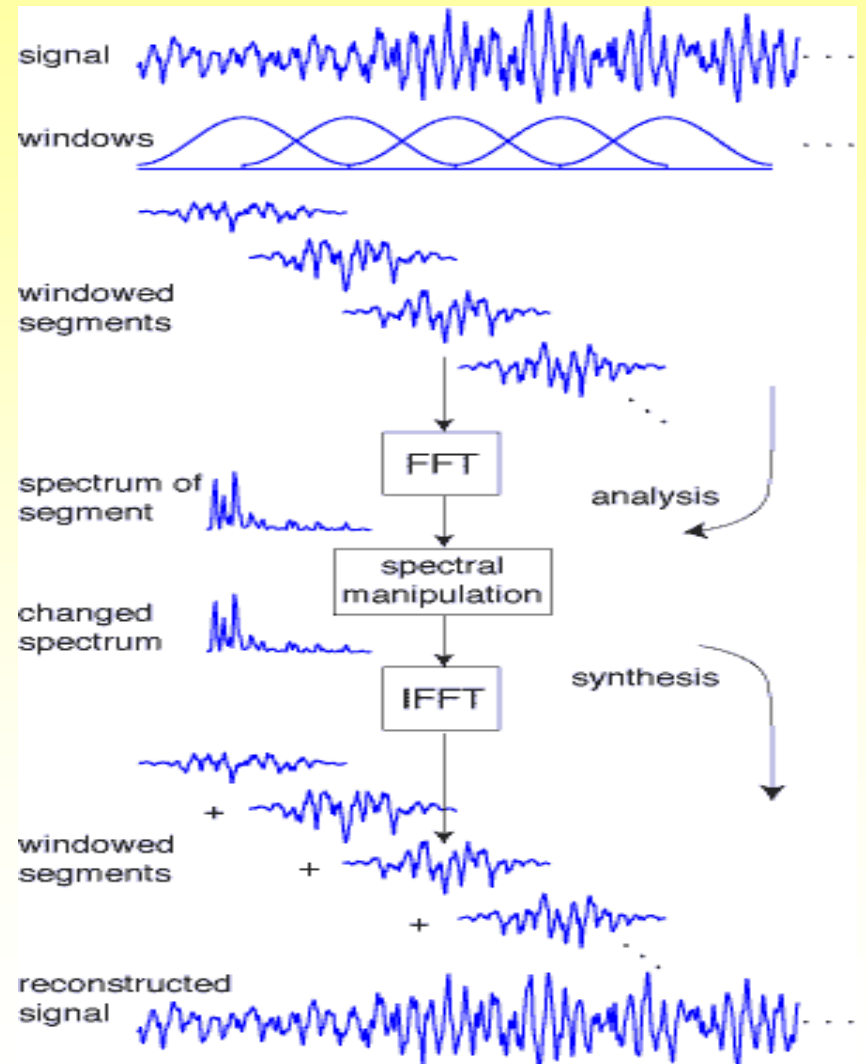
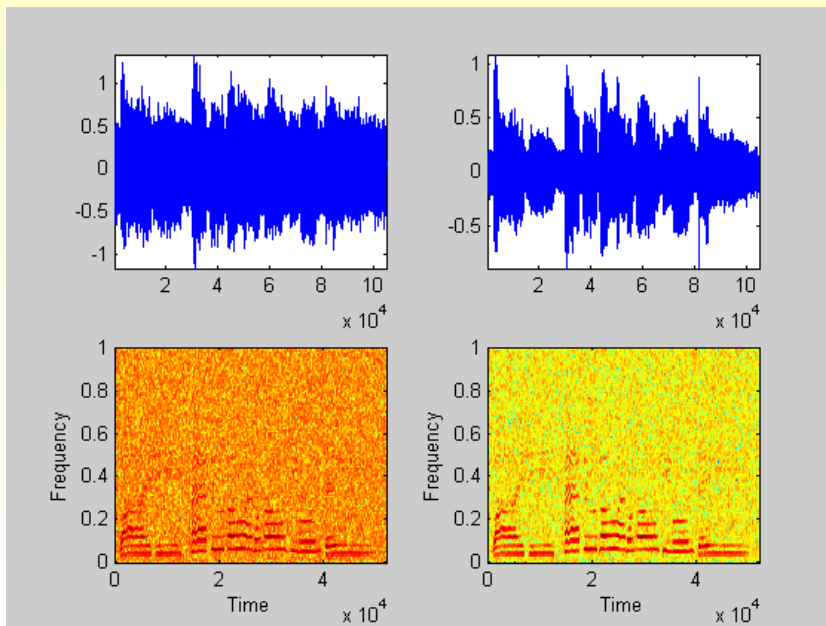


Potlačení šumu pomocí vokodéru

nonlinear spectral subtraction

[Vaseghi, S.V.: Advanced Signal Processing and Digital Signal Processing]

```
% spectral manipulation  
%  
coef=0.02;  
r=abs(X') ./window_length  
;  
Y = (X' .* r ./ (r + coef))';
```



Potlačení šumu pomocí vokodéru

nonlinear spectral subtraction

[Vaseghi, S.V.: Advanced Signal Processing and Digital Signal Processing]

```
% spectral manipulation  
%  
coef=0.02;  
r=abs(X') ./window_length  
;  
Y = (X' .* r ./ (r + coef))';
```

